

جامعة تشرين
كلية العلوم

ميكانيك الكم

الدكتور محي الدين نقاش
مدرس في قسم الفيزياء

الدكتور حسن سلمان
أستاذ في قسم الفيزياء

السنة الرابعة (رف + رفك)

المقدمة

لقد اكتسب علم ميكانيك الكم، منذ أن بدأ عام 1926 على يد شرودنغر ، أهمية خاصة ، وأصبح الأداة الرئيسية التي لا بد منها لكشف أسرار العالم المجهرى ، وقد امتدت تطبيقاته لتشمل مختلف فروع الفيزياء الحديثة وخاصة الفيزياء الذرية والنوية والجسم الصلب ، كما أصبح ضرورياً لدراسة وفهم وتفسير كثير من الحوادث الكيميائية .

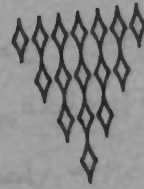
ومن نافلة القول التأكيد على ضرورة الالمام بمبادئ ميكانيك الكم من قبل كل من يريد دراسة الكيمياء والفيزياء في الجامعات . يضم الكتاب الأسس العامة لميكانيك الكم ، وقد شرحنا أولاً ، باختصار ، الأسس الفيزيائية والتجريبية التي يركز عليها هذا العلم، حيث أوردنا بعض الظواهر الفيزيائية التي لا يستطيع الميكانيك الكلاسيكي تفسيرها ، ثم انتقلنا في الفصل الثاني الى استنتاج معادلة شرودنغر وحل بعض المسائل على أساسها . وكان لابد للتعلم في دراسة ميكانيك الكم من بناء هذا العلم على أسس رياضية بالإضافة الى الأسس الفيزيائية ولهذا تم شرح الأسس الرياضية والمسلمات الأساسية كما تم استنتاج معادلة شرودنغر من جديد بطريقة أخرى أكثر رسوخاً في الفصل الثالث ، أما في الفصل الرابع فقد تمت دراسة أحد الموءثرات الذي يوءدي دوراً كبيراً في ميكانيك الكم وهو موءثر العزم الحركي ، مع العلم أن نتائج هذه الدراسة تعمم بشكل آلي على موءثر آخر لا يقل أهمية عنه هو موءثر السبين أو العزم الذاتي الذي ذكرناه في فصل لاحق ، وفي الفصل الخامس شرحنا الحركة في حقل الذي ذكرناه في نهاية الفصل بعض التطبيقات على هذه مركزي متناظر وأوردنا في نهاية الفصل بعض التطبيقات على هذه الحركة وهي دراسة الطيف الدوراني والاهتزازي لجزيء موءلف مسن درتين . ولعل ما زاد ميكانيك الكم رسوخاً ، كفرع هام من فروع

من فروع الفيزياء ، هو نجاحه الرائع في تفسير الطيوف الذريسة
وبصورة خاصة طيف الهيدروجين وهذا ما ذكرناه في الفصل السادس ،
مع العلم أنه كان لهذه الدراسة أثر كبير في اكتشاف نظيرى
الهيدروجين : الديتريوم والتريتيوم . وفي الفصل السابع درسنا حركة
الالكترون في حقل مغناطيسي انطلاقاً مما يسمى مفعول زيمان
ووصولاً الى سبين الالكترون . أما في الفصل الثامن فقد درسنا
الجسيمات المتطابقة وأثر هذا التطابق في سلوكها والاستفادة منه
في حساب توابعها الموجية ، وهذا ما يؤدى في نهاية الأمر الى
مبدأ باولي ذي الأهمية القصوى في دراسة الفيرميونات . ان كثيراً
من مسائل ميكانيك الكم لاتحل بطريقة دقيقة ، ولهذا كان لابد من
البحث عن طرق تقريبية لحلها ذكرنا منها طريقتين أساسيتين هما
طريقة W.K.B. وطريقة نظرية الاضطراب ، وهذا ما تم شرحه في
الفصل التاسع .

وفي النهاية كان من الضروري ، تعميماً لميكانيك الكم اللانسبي
الذي درسناه في الفصول السابقة ، التعرف على مبادئ ميكانيك الكم
النسبي المبني على معادلات ديراك حيث شرحنا هذه المعادلات
بالتفصيل وذكرنا بعض تطبيقاتها في الفصل العاشر مقتصرين على
الحدود التي يسمح بها المنهاج المقرر .

وختاماً لنا ويطيد الأمل بأن يساهم هذا الكتاب في رفع سوية
طلابنا الأعزاء ويساعدهم في فهم الكثير من مواضيع الفيزياء
والكيمياء .

ونكون شاكرين جميع زملاء الذين يبدون أي ملاحظة تتعلق
بهذا الكتاب .



مفردات المنهاج المقررة من قبل مجلس التعليم العالي

لمقرر

ميكانيك الكم

لطلاب السنة الرابعة رف + ف ك ٣ ساعات نظرية

- ١ - تذكرة بمسلمات ميكانيك الكم وبأداته الرياضية
- ٢ - تذكرة سريعة بحلول معادلة شرودنغر
- ٣ - حركة جسيم في حقل مركزي
- ٤ - عزم كمية الحركة المدارية
- ٥ - السبين
- ٦ - حركة جسيم في الحقل الكهرومغناطيسي
- ٧ - مسألة الجسيمين
- ٨ - نظرية الاضطراب وتطبيقاتها البسيطة
- ٩ - عرض موجز لميكانيك الكم النسبوي

الفصل الأول

الأسس الفيزيائية لميكانيك الكم

1 - تمهيد ، فشل الفيزياء الكلاسيكية وقصورها :

في أي فرع من فروع العلوم الفيزيائية يلاحظ أن النظرية تولد وتتطور مع التجربة ولا يشذ ميكانيك الكم ، كنظرية لدراسة الجسيمات الدقيقة ، عن هذه القاعدة ؛ فالأسس التجريبية لهذا العلم بدأت تظهر منذ مدة عندما بدأ العلماء بدراسة اشعاع الجسم الأسود والمفعول الكهروضوئي ، والمجموعات الذرية وغيرها من الأبحاث التجريبية الكثيرة التي يصعب تفصيلها هنا ولكننا في المستقبل سنحاول تحليلها بالاستناد الى نظرية الكم ، التي كانت بدون شك من أهم النظريات التي ظهرت في العصر الحديث ؛ إذ استطاعت بنجاح أن تفسر السلوك الفيزيائي للجسيمات المجهرية (الجسيمات الأساسية ، الذرات ، الذرات المضاعفة) كما أمكن استنتاج قوانين الفيزياء الكلاسيكية كحالة خاصة من فيزياء الكم .

لقد كان معلوماً قبل اكتشاف نظرية الكم أن قوانين

الالكتروديناميك (التحريك الكهربائي Electrodynamics)

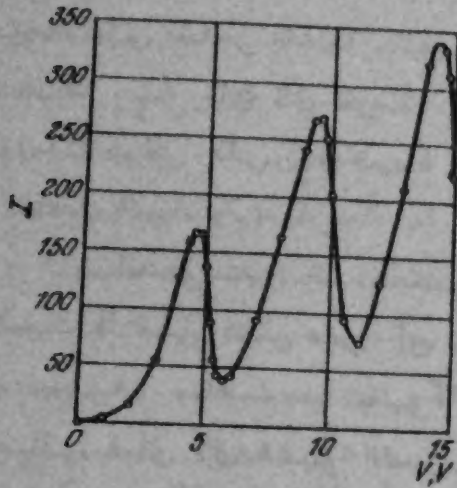
(وهو العلم الذي يدرس حركة الشحنات الكهربائية والحقول الكهربائية الناتجة عن ذلك وتفاعلها بعضها ببعض) لا يمكن أن تطبق في كثير من الحالات، لنأخذ ، كمثال على ذلك ، حركة الالكترونات حول النواة، فحسب قوانين التحريك الكهربائي انه عندما تتحرك شحنة فانها تنبع طاقتها باستمرار الى ان تخسر هذه الطاقة كلها ثم تسكن، ولكننا نلاحظ أن الالكترون السالب بالرغم من أنه يدور حول النواة الموجبة فهو لا يفقد طاقته ولا ينجذب نحوها، أما اذا طبقنا على هذا الالكترون قوانين الميكانيك الكلاسيكي باعتباره يتحرك في حقل كمون مركزي فيوتني جاذب فلا نستطيع تفسير سلوكه في الفيزيائي كما يبدو على شاشة التجربة .

وكمثال آخر على فشل علوم الفيزياء الكلاسيكية في مجال الجسيمات المجهرية نقول انه ، طبقاً لهذه العلوم ، لا يمكن أن يكون لأي جسيم طاقة متقطعة ولكن هذا مخالفاً للواقع كما تثبت التجربة التالية المسماة تجربة فرانك وهيرتز .

(Frank and Hertg experiment)

التي اجريت سنة 1913 حيث تمرر حزمة من الالكترونات الخارجة من مهبط ضمن حجرة تحوي على غاز ثم تستقبل على مصعد حيث يقاس فيما بعد تيار الالكترونات الناتج فنلاحظ أنه يحوي نهايات عظمى ومغرى تختلف مواضعها باختلاف نوع الغاز ضمن الحجرة (الأنبوب) .

لا يمكن، طبعاً، تفسير هذه التجربة على ضوء معلوماتنا في الفيزياء الكلاسيكية ولكننا سنعطي الآن التفسير التالي لوجود النهايات فنقول ان الالكترونات الصادرة من المهبط تصطدم اصطداماً مرناً (Elastic, Elastique) بذرات الغاز ضمن الأنبوب فلا تتغير طاقتها ، وبالتالي فانها تصل الى المصعد الذي يزداد تياره بازدياد الكمون المسرع V للالكترونات الذي يعطيها طاقة eV . وعندما نستمر في زيادة الكمون V فان الالكترونات تستطيع أن تصطدم بالذرات وتهيجها ، أي ترفعها الى سوية طاقة أعلى مما هو ذي



شكل (1.1)
تيار الالكترونات الواصل
الى المصعد بدلالة قيمة
الكمون المسرع V .

الى نقص طاقة الالكترونات وعدم
تمكنها من الوصول الى المصعد
وهذا يؤول الى نهاية صغرى
في التيار . أما اذا استمرينا
في زيادة الكمون V فإن
الالكترونات التي كانت قد
اصطدمت مع ذرات الغاز وخسرت
طاقتها تجد الوقت الكافي لكي
تتسرع من جديد وتصل الى المصعد
مما ينتج عنه نهاية عظمى
جديدة ، ثم باستمرار زيادة
الكمون يلاحظ ان هذه الالكترونات
تكتسب طاقة أكبر وتستطيع
تهييج ذرات جديدة مما ينتج
عنه نهاية صغرى جديدة وهكذا
كما في الشكل (1.1) .

تثبت هذه التجربة أن الذرة تأخذ الطاقة من الخارج بشكل
دفعات وليس بصورة مستمرة وهذا يعني أن للذرة نفسها طبعاً طاقة
متقطعة وعندما تنتقل الذرة المهيجة من سوية طاقة أعلى الى أخرى
أدنى فإنها تشع مقداراً من الطاقة يخرج بشكل فوتون ضوئي
(جسيم طاقة) .

والحقيقة أن الطاقة ليست هي الكمية الوحيدة التي يمكن أن تأخذ
قيماً متقطعة فقد اثبتت تجربة شتيرن وغيرلاخ (Stern - Gerlach
experiment) أن مسقط العزم الحركي لجسيم على محور معين
يمكن أن يأخذ قيماً متقطعة وقد برهنا على ذلك كما يلي :
من المعلوم أنه عندما تمر حزمة جسيمات مشحونة ضمن حقل
مغناطيسي غير متجانس \vec{B} وثابت في الاتجاه (z مثلاً) فإنها
تنحرف عن مسارها باعتبار أن القوة التي تؤثر على الجسيم ، حسب

قوانين التحريك الكهربائي ، تساوي $\frac{2B_2}{3\mu_3}$ حيث μ_3 هو مسقط
 العزم المغناطيسي للجسيمات على المحور 03 ، الذي يتناسب مع عزم
 الحركة المعروف $(\vec{r} \times m\vec{v})$ ، وقد لاحظ العالمان عند استقبال
 الحزمة على حاجز أنها انقسمت الى عدة حزم كل منها يقابل قيمة
 خاصة L_3 أي كل حزمة تحوي مجموعة من الجسيمات التي لمسقط
 عزمها الحركي على 03 قيمة معينة (انظر هذه التجربة بالتفصيل
 في الفصل السابع) .

ان التجريبتين السابقتين تتعارضان بوضوح مع قوانين الفيزياء
 الكلاسيكية التي تنص على أن أي تغير لامتناه في الصغرى في القوة المؤثرة
 على مجموعة ما يسبب تغيراً لامتناهياً في الصغرى في حالتها ،
 وبالتالي فان كل القيم الفيزيائية المرتبطة بالمجموعة كالطاقة وكمية
 الحركة وغيرها يجب أن تكون توابع مستمرة لحالة هذه الجملة .
 ولكن ألا يظهر للجسيمات المجهرية أحياناً بعض الخصائص
 الاستمرارية ؟ بمعنى آخر ، هل يمكن أن نجد قيمة مستمرة للطاقة ؟
 الحقيقة أن بعض التجارب تثبت ذلك ؛ إذ أن دراسة طيف الطاقة
 الناتج عن اصطدام أشعة رونتجن في حقل نويات تثبت الخصائص
 الاستمرارية لهذا الطيف .

2- المفهوم المضاعف الجسيمي-الموجي (المثنوية (Duality):

من الظواهر التي لم تستطع الفيزياء الكلاسيكية تعليلها أيضاً
 هي ما لوحظ من شذوذ في سلوك الجسيمات المجهرية ، فهي تبدو في
 بعض التجارب كجسيمات ، ولكنها تظهر في بعضها الآخر كموجة .
 فمن المعلوم في الفيزياء الكلاسيكية أن للجسيم أبعاداً
 لامتناهية في الصغر والنقطة المادية التي تتحرك في مسار معين
 هي أوضح مثال على ذلك ، ومن الممكن القول في الفيزياء الكلاسيكية
 أيضاً أن للموجة مفهوماً معاكساً لذلك ، فـ للموجة المستوية
 (Onde Monochromatique) التي لها طول موجي ثابت ومعين (امتداداً
 (Monochromatic Wave) ،

وبالتالي لا معنى لقولنا انها تقع في مكان محدد وان لها مساراً معيناً ، غير أنه عندما لا تكون الموجة مستوية ، بل موءلفة من انطباق عدد من الموجات التي لكل منها تواتر محدد فانه يمكن القول انها مجمعة في مجال ما من الفراغ ، وكلما كثر عدد هذه الموجات المختلفة التواتر، صُغُر هذا المجال . وينطبق هذا على كل أنواع الموجات سواء أكانت موجات مرونة أم كهربية أو غيرها . أما الجسيمات المجهرية فانها تتمتع بالخاصتين السابقتين معاً ؛ فمثلاً نجد في بعض التجارب الضوئية أن الفوتونات تسلك سلوكاً موجياً تماماً اذ نحصل على تداخل أو انعراج الأمواج الضوئية ، ولكنها في تجارب أخرى " تتنكر " لصفاتها هذه كما في مفعول كومبتون مثلاً : (*Compton Effect* , *Effet de Compton*) حيث يسلك الفوتون سلوك جسيم حقيقي ؛ اذ يصطفي أحد الالكترونات من حول النواة (من الذرة) ليقتلعه ويذهب به بعيداً دون التأثير على الالكترونات الأخرى للذرة . ولا يمكن أن تفسر هذه الحادثة بالسلوك الموجي للضوء اذ لو صح ذلك لما أثرت الموجة ذات الامتداد اللامتناهي على الكترون واحد فقط . ومن ذلك نستنتج أن لجسيمات الحقل الكهربي ، الفوتونات الضوئية ، سلوكاً مثنوياً .

لنعتبر الخواص الجسيمية فنقول ان مجموعة النتائج التجريبية تبين أن لكل فوتون طاقة تساوي $\hbar \omega$ وكمية حركة P تساوي :

$$P = \frac{E}{c} = \frac{2\pi \hbar \nu}{c} = \frac{2\pi \hbar}{\lambda} = \frac{\hbar}{\lambda} \quad (1.1)$$

حيث $\omega = 2\pi \nu$ التواتر الزاوي ، أما $\lambda = \frac{c}{\nu}$ فهي طول الموجة المرتبطة بالفوتون و $\lambda = \lambda / 2\pi$ وأخيراً فان \hbar هو ثابت يلانك مقسوماً على 2π أي :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-27} \text{ erg / sec.}$$

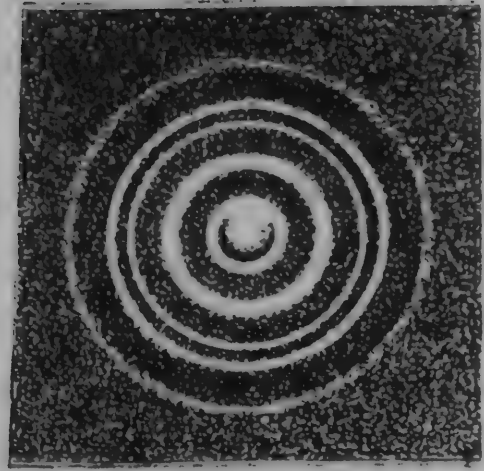
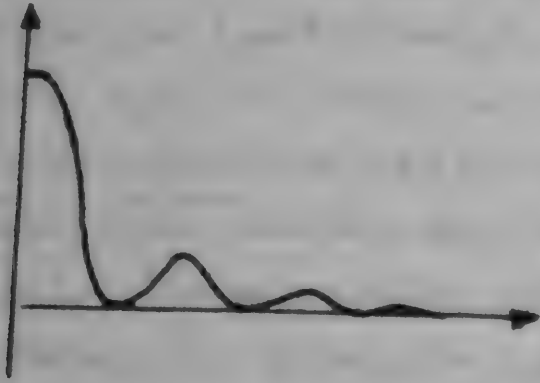
وهذا يعني أنه يرافق كل فوتون، طاقته E ، موجة طولها λ

تحسب من العلاقة السابقة . والجدير بالذكر أن الازدواج السابق لم يكن فقط بالنسبة للفوتونات فهو كذلك يتحقق عند كل الجسيمات المجهرية ولكن كان من السهل ملاحظة الخواص الجسيمية أولاً (ففي غرفة ويلسون مثلاً عندما تمر حزمة جسيمات ضمن بخار مشبع قوئية ويصبح كل ايون مركز تكاثف ويلاحظ الخطوط الناتجة عن ذلك بواسطة المنظار من خارج الغرفة). كذلك يلاحظ السلوك الجيمي بسهولة ففي لوحات التصوير حيث تظهر بوضوح تحت المجهر آثار المسارات التي تركتها الجسيمات في اللوح الحساس وهذا ما جعل بعضهم يفكر أن للجسيمات المجهرية مسارات معينة (بالمعنى الكلاسيكي لمفهوم المسار)، إلا أن التجربة التي سدرسها بعد قليل تبين خطأ هذا التفسير وتؤكد أن مفهوم المثوية هو أحد الملامح الأساسية للجسيمات المجهرية . والجدير بالذكر أن الفيزيائيين النظريين هم أول من تنبأ بالصفات الموجية للإلكترونات والبروتونات وغيرها ، مما نبه المجربين إلى ضرورة إجراء تجارب للتحقق من ذلك .

3 - انعراج الإلكترونات :

(Diffraction of electrons , Diffraction d'électrons)

للبرهان على السلوك الموجي للإلكترونات ندرس التجربة التالية : يمرر من خلال ثقب صغير جداً في حاجز حزمة الكترونات ضيقة بقدر الامكان بحيث تمر من الثقب واحداً واحداً ان أمكن ، ثم نوضح صفيحة حساسة لاستقبال الإلكترونات المارة ، فإذا كان لها صفات جسيمية فقط لوجب أن نحصل على الصفيحة الحساسة على بقعة مظلمة مركزية على الحاجز يقل الظلام عليها كلما ابتعدنا عن المركز ولأمكن حساب شدة الاضاءة على الصفيحة حسب قانون الأخطاء، أي بدستور غوس ، ولكن هذا لا يحدث أبداً ونجد ، بعد مرور وقت كاف ، أن هناك منطقة على اللوحة الحساسة لا يمكن أن تصلها الإلكترونات ثم منطقة أخرى تتوزع فيها الاضاءة بشكل حلقات مظلمة ومضيئة كما يحدث في حالة انعراج الضوء على حواف ثقب



شكل (1.2)

توزع شدة الاضاءة على
الصفحة الحساسة
(اللوحة الحساسة)

صورة للوحة الحساسة
بعد التحميض

وفي هذا برهان واضح على أن لالكترونات صفات موجية بالاضافة الى صفاتها الجسيمية المعروفة سابقاً . اذ ان الدوائر الضوئية الملاحظة على الصفحة الحساسة يمكن أن تعلق بالاستناد الى النظرية الموجية للضوء . وهكذا فان حركة الكترون تختلف تماماً عن حركة جسيم كلاسيكي يمر من خلال ثقب في حاجز .

قد يتبادر الى الذهن أنه يمكن تعليل التجربة السابقة كما يلي : لأسباب ما ، غير معروفة بعد ، يمكن أن تسير الالكترونات على مسارات معينة ولايمكنها أن تسير على أخرى، فلو فرضنا مثلاً أنها يمكن أن تسير على مخاريط صلبة رأسها يقع في ثقب الحاجز حيث تمر واحداً واحداً، فان تقاطع هذه المخاريط مع اللوحة الحساسة يعطي الدوائر الضوئية الملاحظة . غير أن مثل هذا التعليل غير صحيح

والتجربة التالية تثبت خطأه :
يوخذ حاجز يحوي على ثقبين كالثقب السابق وتمرر الالكترونات
من أحدهما مغلقين الآخر فنجد نتائج مشابهة لما سبق ، نغلق الاول
ونفتح الثاني فنحصل على الشيء نفسه ، ولكن ماذا يحدث اذا فتحنا
ثقبين الحاجز معا ولمدة كافية ؟

فاذا فرضنا أن الالكترونات تسير على مسارات معينة فانه
يجب أن نحصل على نتائج تطابق مجموع النتيجةين السابقتين . ولكن
هذا لا يحدث أيضاً ونجد على اللوحة الحساسة شكلا يشبه الانعراج عند
ثقبين قريبين أحدهما من الآخر (التداخل) ، وهذا يعني أن لامعنى
لمفهوم المسار عند الالكترونات ، فلها ، كما للموجات الضوئية ،
صفات موجية ويمكنها أن تتداخل مكونة أهداباً مظلمة ومضيئة
ولا نستطيع التحديد من أي ثقب مر الكترون ما واقع على نقطة ما
من اللوحة الحساسة . وكل ما نستطيع تأكيده عند روعة ظاهرة
التداخل هو أنه يوجد على اللوحة مناطق مضيئة (لا يمكن للجسيم أن
يقع عليها) ومناطق مظلمة (يمكنه أن يقع عليها) .

ان التجربتين السابقتين تثبتان الخواص الموجية للالكترونات
ولكن ماذا عن الخواص الجسيمية له ؟ وهل يمكننا أن نطابق هذا
الالكترون بموجة ما ؟ والجواب يمكن أن يستنتج مما سبق ؛ فلو
كان مجرد موجة فان الصورة التي نحصل عليها بعد مرور وقت كاف
ستكون مشابهة لما نحصل عليه بعد مرور عدد من الالكترونات في وقت
قليل ، والاختلاف الوحيد سيكون في شدة اظلام المناطق المظلمة على
اللوحة الحساسة ولا يمكننا بالقياس الى الموجة الضوئية مشاهدة الأهداب
على لوحة التداخل السابقة (الانعراج عند ثقبين) ولكن هذا
لايحدث ولايمكننا مشاهدة الظواهر الموجية الا بعد مرور وقت كاف . ويجب
التأكد هنا أن الكتروناً ما يقع على الصفيحة الحساسة في مكان
يختلف تماماً عن المكان الذي يقع فيه جسم كلاسيكي مما يدل على
أنه خاضع في حركته لقوانين أخرى غير قوانين الفيزياء الكلاسيكية .
وهكذا ، كما تدل التجربتان السابقتان ، تكون الخواص الموجية

موجودة عند كل الكترون ولكنها لا تظهر بصورة جيدة الا بعد مرور عدد كبير جداً منها . وهذه الخواص ، بالرغم من أنها مستنتجة بالنسبة للالكترونات ، الا انها صحيحة بالنسبة لكل الجسيمات الأساسية والمجهرية . وقد تمكن العلماء من دراسة الخواص الموجية للالكترونات والبروتونات وجسيمات α وغيرها . وأخيراً نختم هذه الفقرة بالنتيجة الهامة التالية :

ان الالكترون (وكل الجسيمات المجهرية) ليس موجة وليس جسيماً بالمعنى الكلاسيكي لهذين المفهومين وانما هو جسيم يتمتع بصفات موجية خاصة به . وسنعمم النتائج التجريبية الآنفة الذكر بصورة كمية لكي نبني بعض المفاهيم الأساسية في ميكانيك الكم .

4 - التابع الموجي (Wave function , Fonction d'onde) :

رأينا في الفقرة السابقة أن للالكترون خواص مسوجية وهذا ما يدعونا الى التفكير بالبحث عن معادلة تفاضلية موجية من النوع الذي يطبق على جسيمات الحقل الكهروطيسي (الفوتونات) بغية دراسة الجسيمات المجهرية ، أي بمعادلة من الشكل :

$$\square \psi = 0$$

(1.1)

حيث \square هو مؤثر دالمبير الذي يساوي :

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

حيث :

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

و ψ هو التابع الموجي المطلوب ايجاده والذي ينبغي أن يصف حركة (بالمعنى الكلاسيكي لهذه الكلمة) الجسيم ، وسنبحث عن شكله

المريح بعد قليل ، أما الآن فسنفرض أنه تابع ما للأحداثيات والزمن من الشكل (x, y, z, t) ψ ولنبحث، على ضوء التجارب السابقة ، ماذا يجب أن يعني ψ من الناحية الفيزيائية ؟ أو بعبارة أخرى، كيف يمكن الربط بين ψ ونتائج التجارب المذكورة سابقا ؟ لقد كان العالم بورن من أوائل الذين أجابوا على هذا السؤال فقال ان المقدار $dV |\psi(x, y, z, t)|^2$ يجب أن يتناسب مع القيمة التي تعطي احتمال وجود الجسيم في عنصر الحجم dV حول النقطة $M(x, y, z)$ في اللحظة t فإذا رمزنا لهذا الاحتمال بالرمز dW يكون :

$$dW \propto |\psi(x, y, z, t)|^2 dV \quad (1.3)$$

وقد استند بورن (Born) في فرضيته هذه الى ما لوحظ في تجربة الثقبين من أننا لانستطيع أن نعلم من أي ثقب مر الكثررون ما ووقع على نقطة ما من الصفحة الحساسة أو بعبارة أخرى ، يمكن للالكثرون الذي مر من أحد الثقبين أن يقع في أي نقطة من الصفحة الحساسة ، وبالتالي فإن مكان وقوعه هناك خاضع لقانون الصدفة أو قانون الاحتمالات ، ولهذا فإن سلوكه يجب أن يحدد بتابع ما احتمالي ، الا أن التابع (x, y, z, t) ψ كحل لمعادلة موجية لا يمكن أن يكون احتمالياً لأنه قد يأخذ قيمة سالبة كما قد يكون شعاعياً أو حتى عقدياً (يحيوي $i = \sqrt{-1}$) ؛ بينما يجب أن يعطي الاحتمال بعدد ما حسابي ، ولكن التابع $|\psi(x, y, z, t)|^2$ يمكن أن يعطينا الاحتمال المطلوب بالإضافة الى أنه يحوي الخواص الموجية للجسيم من خلال التابع ψ نفسه وهكذا فإن التابع $|\psi|^2$ هو التابع الموجي الذي يمكننا من ربط الخواص الموجية للجسيم بالخواص الاحتمالية لمكان وجوده .

يوكد المعنى الفيزيائي المذكور للتابع الموجي أن الحقل الموجي $\psi(x, y, z, t)$ ، اختصاراً (\vec{r}, t) ψ ، يختلف عن بقية

الحقول في الفيزياء الكلاسيكية ؛ اذ لا معنى فيزيائياً هنا للمقدار ψ الذي يمكن أن يكون تخيلياً وكذلك فإن كلاً من ψ و $A\psi = \psi^*$ (حيث A ثابت ما حقيقي) يمكن أن يعطي المعنى الفيزيائي نفسه طالما أن كلاً منهما يمكن أن يؤول إلى التوزيع الاحتمالي نفسه طبقاً للعلاقة (1.3) غير أنه يمكن تعيين الثابت A بحساب احتمال وجود الجسم في كل نقاط الفراغ ، هذا الاحتمال الذي يجب أن يساوي الواحد طبعاً أي :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, y, z, t)|^2 dV = 1 \quad (1.4)$$

تعتبر العلاقة عما يسمى شرط تنظيم التتابع الموجية (شرط التوحيد) ، فإذا كان التابع $\psi(\vec{r}, t)$ في (1.3) منظماً على الواحد فيمكن تحويل التناسب إلى مساواة وبالتالي نجد :

$$dW = |\psi(x, y, z, t)|^2 dV = \rho(x, y, z, t) dV \quad (1.3')$$

حيث ρ هي الكثافة الاحتمالية (مقدار الاحتمال في واحدة الحجم) أما احتمال وجود الجسم في حجم محدود V فيعطى بالعلاقة :

$$W(V, t) = \int_V dW = \int_V |\psi(x, y, z, t)|^2 dV \quad (1.5)$$

لنلاحظ أخيراً أن التابع الموجي المنظم بالشرط (1.4) لا يتغير إذا بدلناه بالتابع $\psi' = e^{i\alpha} \psi$ حيث $\alpha = \alpha(x, y, z, t)$ هو أي تابع حقيقي للاحداثيات والزمن ، إذ نحصل على النتيجة نفسها لأن :

$$|e^{i\alpha}|^2 = e^{i\alpha} e^{-i\alpha} = 1$$

5 - التابع الموجي لمجموعة جسيمات :

كثيراً ما نتعامل في الفيزياء الكوانتية مع مجموعة جسيمات لذلك لابد من دراسة بعض الخواص العامة للتابع الموجي الذي يصف سلوك مجموعة جسيمات ويكون من الشكل :

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$$

ولنفرض انه يصف مجموعة مؤلفة من N جسيم في اللحظة t ، ولناخذ أولاً الحالة العامة عندما تتأثر الجسيمات بعضها ببعض فيمكن أن نكتب ، كتعميم للحالة السابقة أن المقدار :

$$dW \propto |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)|^2 dV_1 dV_2 \dots dV_N \quad (1.6)$$

يجب أن يمثل احتمال وجود الجسيم (1) في عنصر الحجم dV_1 والجسيم (2) في عنصر الحجم dV_2 ... الخ، أما إذا أردنا كتابة احتمال وجود الجسم رقم (1) في عنصر الحجم dV_1 ويتوزع اختياري لبقية الجسيمات فانه يجب استكمال العلاقة (1.6) في كل عناصر الحجم ما عدا الحجم V_1 الخاص بالجسيم رقم (1) أي :

$$dW_1 = dV_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)|^2 dV_2 dV_3 \dots dV_N \quad (1.7)$$

وكذلك بالنسبة لبقية الجسيمات . أما شروط التنظيم في هذه الحالة فهذه :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)|^2 dV_1 dV_2 \dots dV_N = 1 \quad (1.8)$$

حيث يجري التكامل على ساحة ذات $3N$ بعداً وليس في الفراغ العادي (x, y, z) .

وفي الحالة الخاصة عندما يكون لدينا N جسيم غير متأثرة

بعضها ببعض فان احتمال وجود كل منها في حيزه الخاص ^{يكون} مستقلاً عن الآخر. وعندئذ نكتب العلاقة (1.8) بالشكل :

$$dW = dW_1 dW_2 \dots dW_N =$$

$$= |\psi_1(\vec{r}_1, t)|^2 dV_1 \cdot |\psi_2(\vec{r}_2, t)|^2 dV_2 \dots |\psi_N(\vec{r}_N, t)|^2 dV_N \quad (1.9)$$

والتابع الموجي لمجموعة جسيمات يمكن أن يكتب كجاء للتواضع $\psi_k(\vec{r}_k, t)$ حيث $k = 1, 2, \dots, N$ أي :

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = \psi_1(\vec{r}_1, t) \psi_2(\vec{r}_2, t) \dots \psi_N(\vec{r}_N, t) \quad (1.10)$$

6 - التابع الموجي لجسيم حر (غير خاضع لأي كمون) :

بعد أن أوردنا بعض الملاحظات العامة على التابع الموجي سنبحث عن شكل هذا التابع الذي يصف سلوك جسيم حر . ويبدو للوهلة الأولى صعوبة ذلك فلا بد من ادخال مفاهيم حديثة جديدة ، لأن الفيزياء الكلاسيكية ، كما يظهر ، لا تنطبق هنا . ولكن ألا يمكن الاستفادة منها الى حد ما ؟ فهل يمكن مثلاً تطبيق المفهوم المضاعف الجسيمي الموجي لحساب التابع الذي يصف سلوك جسيم ؟ لنعترف أننا أدخلنا بعض المفاهيم الكلاسيكية فيما مضى فقولنا احتمال وجود الجسيم في عنصر الحجم dV يعني أن هناك مكاناً في الفراغ يمكن أن نجد فيه مثل هذا الجسيم (معنى جسيمي) وقولنا أن له خواص موجية تثبت أنه يمكن أن نستعمل بعض المفاهيم الكلاسيكية كطول الموجة الذي يمكن أن يقاس من دراسة توضع الحلقات الانعراجية على اللوحة الحساسة .

فلنفرض أولاً أنه يمكن اعطاء الالكترون كمية حركة P وطاقة

E بحيث يكون :

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (1.11)$$

وهذا يتحقق تجريبيا بصعوبة بايجاد حزمة الكترونات تتسرع بواسطة كمون معطى بشكل دقيق ، وعندئذ يمكن أن يكون لكمية الحركة معنى . أما الخطوة التالية فقد اقترحها العالم الفرنسي دوبروي حيث فرض أن الالكتران المتحرك بكمية حركة P يترافق بموجة طولها λ يعطي بالعلاقة :

$$|P| = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{\hbar}{\lambda} = \hbar |K| \quad (1.12)$$

حيث \vec{K} الشعاع الموجي ويساوي عددياً مقلوب طول الموجة $|K| = 1/\lambda$ أي ما يشبه بالضبط العلاقة (1.1) المطبقة على الفوتونات الضوئية .

لنفرض أيضاً أن طاقة الجسيم يمكن أن تعطى بعلاقة مشابهة كما في حالة الفوتونات أي $E = \hbar \omega$ حيث $\omega = 2\pi \nu$ وعندئذ يمكننا كتابة التابع الموجي لجسيم حر يتحرك بكمية حركة P كحل المعادلة الموجية، كما في حالة الضوء، بالشكل التالي :

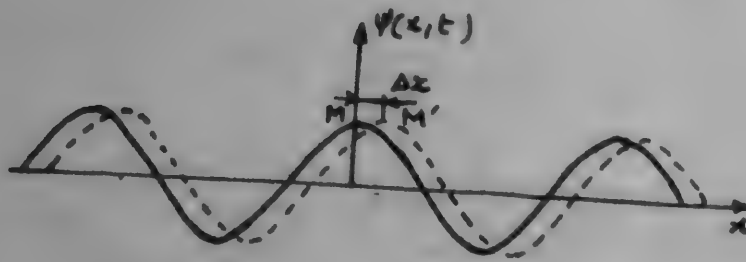
$$\psi_p(\vec{r}, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} = A e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.13)$$

ان تواتر الاهتزازات في هذه الحالة يمكن أن يحسب أيضاً من العلاقات السابقة فنكتب كما في حالة الفوتونات أيضاً :

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar K^2}{2m} \quad (1.14)$$

7 - سرعة الطور ، سرعة الباقة الموجية :

ان سرعة انتشار طور معين للاهتزاز الذي يسمى سرعة الطور
تحتسب في نظرية الاهتزازات كما يلي :



تؤخذ موجة مستوية
كما في الشكل
(1.3)، وتؤخذ
نقطة منها ذات
طور معين أي :

شكل (1.3)

$$\psi = p_2 x - E t = \text{const.}$$

الموجة المستوية وحساب سرعة الطور

فعندما يزداد الزمن بمقدار Δt فإن النقطة M الموضحة على
الشكل تنتقل بمقدار Δx فتصبح في M' بحيث يكون من أجل الموجة
نفسها (نفس الطور) :

$$\psi = p.(x + \Delta x) - E.(t + \Delta t) = \text{const.}$$

وسرعة النقطة M (سرعة الطور) ستكون :

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{E}{p} = \frac{\hbar \omega}{\hbar k} = \frac{\omega}{k} \quad (1.15)$$

ويمكن حساب v_p للالكترونات اذا بدلنا ω بقيمتها من العلاقة
(1.14) :

$$v_p = \frac{\hbar k^2}{2mk} = \frac{\hbar k}{2m}$$

هذا ويمكن حساب λ_φ بشكل آخر . اذا كتبنا العبارة النسبية للطاقة :

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

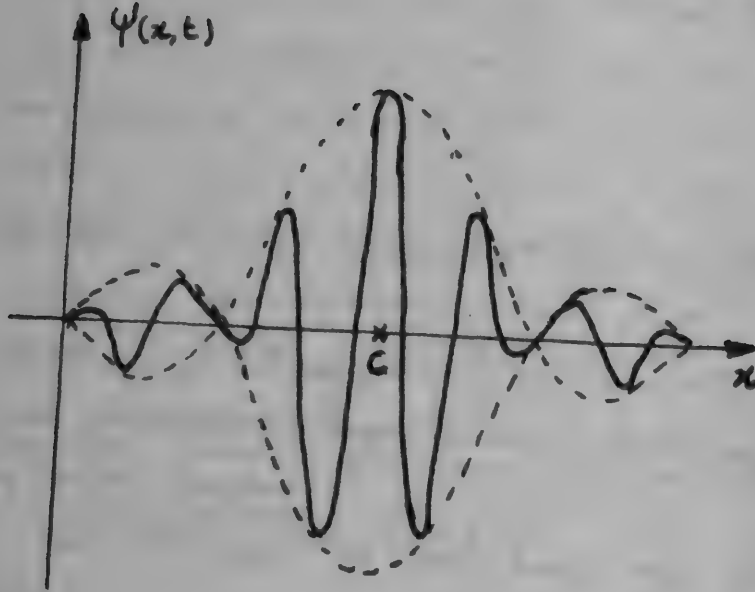
وبدلتها في (1.15) فإننا نجد :

$$\lambda_\varphi = \frac{h\nu}{k} = \frac{E}{\hbar k} = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2 c^2 + m_0^2 c^4}{\hbar^2 k^2}} = \sqrt{c^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2 k^2}} > c$$

الا أنه طبقاً للنظرية النسبية لا يمكن لجسيم أن يسير بأسرع من سرعة الضوء c ، وبالتالي فان الموجة المستوية الانفة الذكر، لا يمكن أن تحمل الالكترون؛ فاذا انطبقا في لحظة ما ($t = 0$ مثلاً) فانهما سيفترقان حتماً فيما بعد لأن سرعة الطور (سرعة انتشار الموجة) أكبر من سرعة الجسيم، فهل هذا يعني أن المفهومين الجسيمي والموجي معاً لا يمكن أن يكون لهما معنى الا في لحظة معينة ؟ وبعبارة أخرى ليس لفرضية دو بروي معنى الا في لحظة معينة من الزمن ؟ فالجسيم لا يرافق بموجة الا في تلك اللحظة ؟

الحقيقة أنه يمكننا الخروج من هذا المأزق اذا فرضنا أن الالكترون لا يرافق بموجة مستوية وحيدة اللون وانما بمجموعة من الموجات المستوية التي لها تواترات قريبة بعضها من بعض وسنجد تجسيدا لذلك في الفقرة القادمة حيث نستنتج مبدأ مهما من مبادئ فيزياء الكم . ولكن قبل أن ننهي هذه الفقرة لابد من التذكير بتعريف سرعة الباقة الموجية استناداً الى نظرية الاهتزازات فنقول انه عندما تنتشر مجموعة موجات متقاربة في عددها الموجي (في تواترها) في وسط ما فان الاهتزازة الناتجة لكل نقطة من الوسط ستكون عبارة عن مجموع الاهتزازات التي تأتياها من كل موجة وبالتالي فان الاهتزازة ستكون عظمى في النقطة التي تتطابق فيها

أطوار الموجات وستكون صفري عندما تتعاكس هذه الأطوار. نسمى
النقطة C حيث يكون المطال أعظمية بمركز المجموعة الموجية
شكل (1.4) .



شكل (1.4)
الباقة الموجية

نرمز لسرعة المركز C
بالرمز v_g ونسميه
سرعة الباقة الموجية
(Group velocity)
(سرعة المجموعة)
(Vitesse de groupe)
وليس من الصعب حساب v_g
إذا لاحظنا أن كل
الموجات تتطابق في
أطوارها في المركز C
مهما كانت أطوال
موجاتها (مهما
كان عددها الموجي)

وبالتالي فإن الطور الناتج المقابل لـ C لا يتعلق بـ K ويعبر عن
ذلك رياضياً بالعلاقة :

$$\frac{\partial \psi}{\partial k} = 0$$

$$p = \hbar k \quad E = \hbar \omega$$

حيث :

$$\psi = Kx - \frac{E}{\hbar} t = Kx - \frac{\hbar^2 k^2}{2m\hbar} t$$

نشتق فنجد :

$$\frac{\partial \psi}{\partial k} = x - \frac{\hbar}{m} k t$$

وهذه العلاقة صحيحة في اللحظة $t + \Delta t$ أيضاً حيث ينتقل المركز
C بمقدار Δx فنجد عندئذ :

$$\Delta x - \frac{1}{n} K \Delta t = 0$$

و منتهی :

$$v_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\hbar K}{m} = \frac{p}{m} = v \quad (1.18)$$

أي تساوي سرعة الجسيم تماماً ، مما يؤكد أنه يمكن أن يترافق
الجسيم بمجموعة من الموجات المتقاربة في تواترها والتي يطلق عليها
 اسم الباقة الموجية .

لنلاحظ أخيراً أنه يمكن الحصول على N_g باشتقاق ω بالنسبة إلى k :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left(\frac{E}{\hbar} \right) = \frac{d}{dk} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m\hbar} \right) = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v \quad (2.18)'$$

٨ - التحقيق التجريبي لفرضية دوبروي - مبدأ التراكب :

(Principle of superposition, Principe de superposition)

بينما في الفقرة السابقة، كيف فرض العالم دوبروي (De Broglie) وجود موجة ترافق الجسم في حركته وسنبحث في هذه الفقرة التحقيق التجريبي لهذه الفرضية ثم نستنتج مبدأ هاماً آخر من مبادئ الميكانيك هو مبدأ التراكب .

بما أن للإلكترون خواص موجية فيجب أن يحدث له ظواهر
انعراجية على شبكة الانعراج أيضا بالإضافة الى ما لاحظناه في

الفقرة الأولى من الظواهر الانعراجية على حواف ثقب .
ولرؤية ظواهر الانعراج على شبكة يجب أن نتحقق شروط خاصة تتعلق بالشبكة نفسها وبطول موجة الضوء الوارد ، فلا يمكن مثلاً دراسة انعراج الأشعة السينية على شبكة انعراج عادية مهما دقت خطوطها ولذلك فكر العالمان دافيدسون Davidson وجرمير Gomer ، بطريقة أخرى وهي أحداث الانعراج بواسطة بلورة من النيكل إذ أن ذرات هذه البلورة ، تحت درجة حرارة معينة ، تنتظم لتكون خطوطاً شبيهة بخطوط شبكة الانعراج بحيث يمكن للإلكترونات أن تنعرج عليها إذ أن المسافة بين خطين منها تساوي 0.91 \AA وبالتالي فإن عددها يساوي $10^8 / 0.91 \approx 10^8$ في السم الواحد. فإذا طبقنا على الإلكترونات المنعرجة قانون الانعراج المعروف :

$$N\lambda = d \sin \theta \quad (1.19)$$

(حيث d عرض الحزمة والمسافة بين صفين من الذرات N رقم هذب الانعراج ، θ زاوية الانعراج) ، لأمكننا أن نحسب طول الموجة λ المرافقة للإلكترون المنعرج فنجد أن :

$$\lambda = 1.65 \text{ \AA}$$

أما إذا حسبناها بالاستناد إلى علاقة دوبروي للإلكترون طاقتها $E = 54 \text{ eV}$ وكمية حركة P فنجد أن :

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.63 \times 10^{-27} \times 10^8}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 54 \times 1.6 \times 10^{-19}}} = 1.66 \text{ \AA}$$

وهذا يوافق النتيجة التجريبية المقاسة ($\lambda = 1.65 \text{ \AA}$) مما يدعم نظرية دوبروي ، كذلك أجريت عدة تجارب أخرى للتحقق من علاقة دوبروي فعينت الأطوال الموجية الموافقة لنويات الهيليوم

$4He$ والهيدروجين H باستخدام ظاهرة الانعكاس على سطوح بلورية وقد كانت النتائج دائماً تثبت البنية الموجية للمادة .
ولاهمنا هنا الخاصة الانعراجية للشبكة فقط وإنما، وبصورة أكثر الخاصة التحليلية لها ، فلو كان الضوء الوارد وحيد اللون لما تحلل ، أما إذا كان مؤلفاً من عدة موجات متقاربة في أطوالها الموجية فلا بد أن تتحلل عندما تمر ضمن شبكة ونحصل على مجموعة أضواء وحيدة اللون . والحادثة نفسها تحدث للالكترونات التي ، كما رأينا سابقاً ، لا يمكن أن تحملها موجة مستوية (وحيدة اللون) ولذلك فإن الحزمة الواردة للشبكة والمؤلفة من انطباق عدد من الموجات المستوية ستحلل إلى مجموعة حزم الكترونية تتصف بأن لكل منها طول موجة معيناً وبالتالى، حسب العلاقة $p = h/\lambda$ ، كمية حركية معينة . ويجب أن لا يفهم هذا التعيين بالمعنى الدقيق للكلمة إذ تبقى λ محصورة بين $\lambda - \delta\lambda$ ، $\lambda + \delta\lambda$ مهما كانت شدة تحليل الشبكة .

وهكذا يمكن اعتبار الشبكة كجهاز يحلل حزمة الالكترونات الواردة إلى عدة حزم نجد في كل منها الالكترونات التي لها طول موجة معين ، أي أن الشبكة تحلل الحالات الكوانتية التي كانت مجموعة في الحزمة الواردة إلى كل الحالات المكونة لها . ولهذا أهمية أساسية، إذ يمكن تشبيهه بنشر فورييه الذي يعطي أي تابع دوري مهما كان دوره يشكل مجموعة توابع بسيطة كما هو معروف في الرياضيات . فلنكتب الآن هذا النشر للتابع الموجي الذي يصف حالة الالكترونات الواردة إلى شبكة الانعراج (x, y, z, t) بدلالة التوابع البسيطة التي تفرق إليها وهي ذات كمية حركية معينة أي $\psi_p(x, y, z, t)$ موجات مستوية كما في (1.13)، أي :

$$\psi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(p_x, p_y, p_z) \psi_p(x, y, z, t) dp_x dp_y dp_z \quad (1.40)$$

حيث $C(p_x, p_y, p_z)$ يعطي الوزن الاحصائي للحالة $\psi_p(x, y, z, t)$ فاذنا اخذنا الثابت A في (1.13) مساوياً $(1/2\pi\hbar)^{3/2}$ فيمكننا أن نكتب (1.20) بالشكل :

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\vec{p}) \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} d\vec{p} \quad (1.21)$$

وهذه العلاقة هي التعبير الرياضي عن مبدأ التراكب في ميكانيك الكم وهو يعني أنه اذا وجدت جملة كوانتية في حالات موصوفة بالتتابع الموجية $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ فانها يمكن أن توجد في الحالة الموصوفة بالتابع :

$$\Psi = \sum_n c_n \psi_n \quad (1.22)$$

وأهمية هذا المبدأ ، بصورة خاصة ، تكمن في أنه يحدد المعادلات التفاضلية الخطية لتعيين ψ . واذا أخذ الوسيط \hbar في (1.22) قيماً غير متقطعة (متصلة) فيمكن تحويل الجمع الى تكامل كما في (1.21) .

لنأخذ تطبيقاً على ذلك ، فندرس التابع الموجي لجسيم كمية حركته غير معينة بصورة تامة ولكنها تقع في المجال $p_0 - \Delta p < p < p_0 + \Delta p$ ولتبسيط المسألة نفرض أن الحركة تحدث في الاتجاه x ، أي أن $\vec{p} \cdot \vec{r}$ تصبح :

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = p_x x + p_y y + p_z z = p_x x = p x$$

وعندئذ نكتب (1.21) بالشكل :

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(x, t) = \int_{p_0 - \Delta p}^{p_0 + \Delta p} C(p) \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} dp \quad (1.23)$$

او بدالة K ، اذا أخذنا بدلاً من P المتحول $k = P/\hbar$ ، فنحصل على المعادلة :

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}} \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} C'(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (1.24)$$

ويسهل اجراء هذا التكامل اذا علمنا أن $\Delta k \ll k$ أي $k \approx k_0$.
 وأن $C'(k) \approx C'(k_0)$ وكذلك نكتب $k = k_0 + (k - k_0)$.
 وبما أن ω تابع لـ k فيمكن نشره حول القيمة $\omega = \omega_0$ الموافقة لـ $k = k_0$ فنجد :

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} (k - k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0) \quad (1.25)$$

وذلك باهمال الحدود الصغيرة من المرتبة الثانية فما فوق .
 وبالتبديل في (1 . 24) نجد :

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}} C'(k_0) \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} dk e^{i \{ [k_0 + (k - k_0)]x - [\omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0)]t \}} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}} C'(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{i [(k - k_0)x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0)]} dk \end{aligned}$$

لتغير الآن المتحول فنفرض $k - k_0 = u$ ، وهذا مكافئ لنقل المحاور الاحداثي الشاقولي الى اليمين بمقدار k_0 ، وعندئذ يصبح التكامل :

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}} C'(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-u k}^{+u k} e^{i u [x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t]} du \quad (1.26)$$

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} C'(k_0) \frac{\sin[\Delta k(x - (\frac{d\omega}{dk})_0 t)]}{x - (\frac{d\omega}{dk})_0 t} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \quad (1.27)$$

تمثل المعادلة السابقة (1.27) حزمة موجية لأنها تتألف من انطباق عدة موجات متقاربة في كمية حركتها (أو أعدادها الموجية) وسعة هذه المجموعة، ككل، متغيرة وتعطى بالعلاقة :

$$B = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} C'(k_0) \frac{\sin[\Delta k(x - (\frac{d\omega}{dk})_0 t)]}{x - (\frac{d\omega}{dk})_0 t} \quad (1.28)$$

أما سرعة الباقة الموجية فتعطى حسب التعريف (1.18) في النقطة $k = k_0$ بالعلاقة :

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 = \frac{d}{dk} \left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right)_0 = \left(\frac{\hbar k}{m}\right)_0 = \frac{p_0}{m}$$

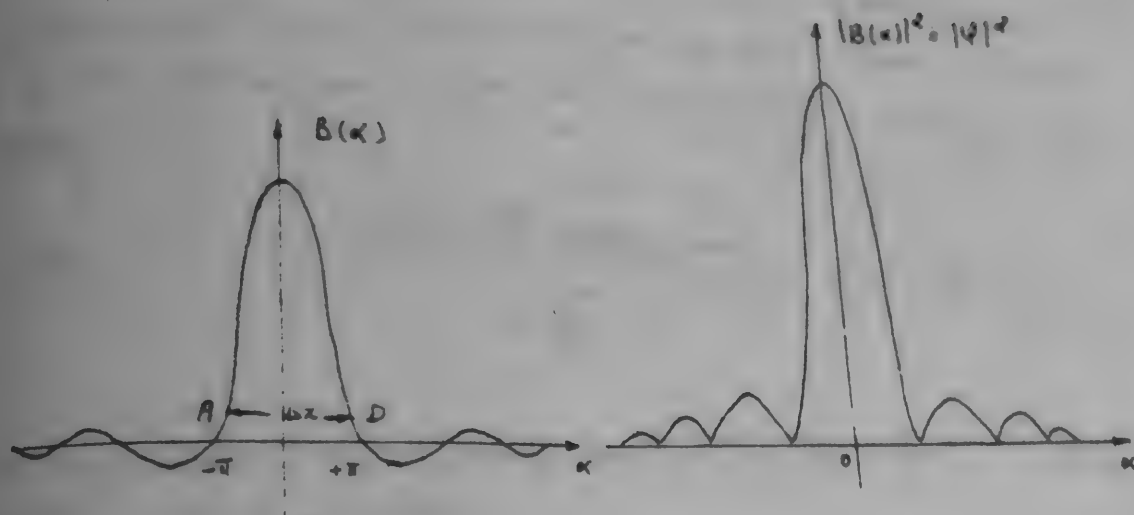
لنلاحظ أخيراً أنه حسب احتمال وجود الجسيم الموصوف بالتابع $\psi(x,t)$ فإنه يكون للمقدار $|\psi(x,t)|^2$ نهاية عظمى في النقطة x وفي لحظة t بحيث ينعدم المخرج، لنرسم التابع الدال على تغيرات السعة (1.28) بدلالة الزاوية $\alpha = \Delta k(x - v_g t)$ في اللحظة t فنلاحظ أن B تأخذ نهاية عظمى حادة مقدارها :

$$B_{max} = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} C'(k_0) \Delta k$$

في النقطة التي تحقق العلاقة $\Delta k(x - v_g t) = 0$ أي عند $x = v_g t$ ثم يهبط الخط البياني عندما تتغير الزاوية α وينعدم في النقط التي تحقق العلاقة :

$$\alpha_m = \Delta k(x - v_g t) = \pm m\pi$$

(1.29)



شكل (1.5)

تغيرات سعة الباقة الموجية
 $B(\alpha)$ بدلالة الزاوية α
 في اللحظة $t=0$.

شكل (1.6)

تغيرات احتمال وجود الجسيم
 المرافق للباقة الموجية في
 اللحظة $t=0$ بدلالة α (أو x).

ويوضح الشكل (1.5) تغيرات سعة الباقة الموجية $B(\alpha)$ بدلالة الزاوية α في اللحظة $t=0$ ، أما احتمال وجود الجسيم في تلك اللحظة في واحدة الحجم أي $|B(\alpha)|^2$ فيتمثل بيانياً حسب الشكل (1.6)، حيث نلاحظ الاحتمال الأعظمي لوجود الجسيم في مركز الباقة الموجية وهذا ما دعا بعض العلماء سابقاً للقول أن الجسيم متمركز في النقطة 0 ولكن ثبت فيما بعد أن هذا الجسيم يمكن أن يوجد في أي مكان من الباقة الموجية المرافقة له .
 نلخص ما سبق بما يلي :

ان العلاقة (1.27) هي التعبير الرياضي عن مبدأ التراكب في ميكانيك الكم وهي تعني أن مجموعة موجات متقاربة في عددها الموجي K (حيث K تقع في المجال $k_0 - \Delta K < k < k_0 + \Delta K$) هو موجة جديدة عددها الموجي k_0 وتواترها ω_0 لكن مطالها متغير ويعطى بالعلاقة (1.28) .

9 - مبدأ الشك

(Uncertainty principle , Principe d'incertitude)

الملة مابين م . كم و م . كلاسيكي :

سنبرهن في نهاية هذا الفصل أن لمفهوم الباقة الموجية المعطاة بالمعادلة (1.27) أهمية أساسية إذ سنحدد بواسطتها مجال تطبيق الميكانيك الكلاسيكي على الجسيمات الصغيرة ، وسنقتصر هنا على مفهومي كمية الحركة وموضع الجسيم (احداثياته) على أن نعود لبرهان العلاقات الرياضية فيما بعد .
من المعلوم أن للموجة المستوية امتداداً لانهائياً في الفراغ فلنحسب عرض الباقة الموجية المعطاة بالمعادلة (1.27) في الزمن t ، ولنفرض أن العرض المذكور هو المسافة بين النقطتين A و D على الشكل (1.28) الموافق لـ $\alpha_1 = -\pi$ و $\alpha_2 = +\pi$ فنجد أخيراً من (1.29) بعد تبديل α_1 بـ $-\pi$ و $+\pi$ على الترتيب ثم الطرح أن :

$$x_2 - x_1 = \Delta x \approx \frac{2\pi}{\Delta K}$$

ومنه :

$$\Delta x \cdot \Delta K = 2\pi \quad (1.30)$$

ولكن هذه العلاقة تقريبية وليست دقيقة تماماً لأننا اكتفينا

عند نشر المقدار Δ بحد واحد في (1.25) كما أننا
اعتبرنا $C'(k) \approx C'(k_0)$ وبالتالي يمكننا أن نؤكد
أن الحالة العامة تتطلب دراسة أشمل وعندئذ سنحصل على علاقات
أخرى أكثر دقة من (1.30) نوردتها فيما يلي على أن
نبرهنها عند دراسة الأسس الرياضية لميكانيك الكم . وهي :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim \hbar \quad (1.31)$$

(وتقرأ الإشارة \gtrsim من رتبة)
أما إذا كان انتشار الموجة بالاتجاه y أو z فسنحصل
على العلاقتين :

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \gtrsim \hbar \quad (1.32)$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \gtrsim \hbar \quad (1.33)$$

تعتبر هذه العلاقات الثلاث عما يسمى عدم التعيين (أو مبدأ الشك)
في ميكانيك الكم وسندرس المعنى الفيزيائي لها .
أن عرض الباقة الموجية المرافقة للالكترون تساوي Δx وهذا
يعني أنه إذا أجرينا قياساً على الالكترون فسنجده في مكان ما
من هذا العرض أي أن موضعه معين بخطأ Δx ولكن ليس لهذا الالكترون
كمية حركة معينة تماماً لأنه ، كما ذكرنا سابقاً ، لتشكل الباقة
الموجية الموافقة له أخذنا مجموعة من الأمواج المستوية ، تتقارب
في عددها الموجي k (أو في كمية حركتها) أي أن p معين في
المجال $p_0 - \Delta p < p < p_0 + \Delta p$ وهذا يعني أنه إذا أجرينا
قياساً لتعيين اندفاع (كمية حركة) هذا الالكترون (المعين
مكانه في المجال Δx) فسيتعين معنا بتقريب Δp أي أن القيمتين
 p ، x لا يمكن أن تتعينا معا بدقة في وقت واحد وإنما
الدقة في تعيين أحدهما ($\Delta x \rightarrow 0$) سيقابلها تعيين أقل
دقة (خطأ كبير) في الآخر لأن Δp_x يكبر كثيراً .
ويجب أن نؤكد أن عدم التعيين هذا من الخصائص الأساسية

للجسيمات المجهرية ولا علاقة له مطلقاً بجهاز القياس ، مهما كانت دقة التجربة (تجربة الانعراج الشهيرة خلال الثقبين مثلاً) فسنحصل دائماً على النتائج نفسها ، فالمسار هنا اذن ليس له معنى ، ونلاحظ دائماً على الصفيحة الحساسة الخطوط العريضة (بالنسبة لجسيم الالكترتون) الدالة على اصطدام الالكترونات بهذه الصفيحة ، مما يدل على أن موضع الالكترتون لايعين الا بالدقة المحددة بحجم المسار على الصفيحة الحساسة ، وهذا يعني أنه لايمكن ، قياساً بالميكانيك الكلاسيكي ، دراسة الحركة ، أي تعيين المسار (موضع الجسيم) والسرعة في الوقت نفسه بالدقة التامة وكل ما يمكننا عمله هو التاكيد أن هذا الجسيم واقع في مكان محدد بغطاً Δx وله كمية حركة محددة بغطاً أعظمي Δp_x ، مع العلم أن الدقة في تعيين احدى الكميتين ستكون على حساب الكمية الأخرى لأنهما مرتبطتان بالعلاقة (1.31).

لنناقش الحالة الخاصة ، حالة موجة مستوية منتشرة باتجاه Ox فمن المعلوم أن لها شعاعاً موجياً ثابتاً ومعيناً بدقة تعريفاً ، أي أن $\Delta p_x \rightarrow 0$ فينتج من (1.31) أن $\Delta x \rightarrow \infty$ أي أن امتدادها لانها ئي ، وفي الحقيقة اذا حسبنا المقدار $|\psi|^2$ الذي يعطي الكثافة الاحتمالية في الفراغ وجدناه يساوي مقداراً ثابتاً $(1/2\pi\hbar)$ وبالتالي فان احتمال وجود الجسيم المرافق للموجة المستوية في كل الفراغ لايتعلق بالمكان فيمكن أن يوجد هذا الجسيم في أي نقطة وبالتالي $\Delta x \rightarrow \infty$ وعلى العكس (عكس الموجة المستوية اذا صح التعبير) اذا كان الموضع معيناً تماماً كما في غرفة ويلسون $\Delta x \rightarrow 0$ فان كمية حركة الالكترتون ستكون معينة بـ $\Delta p \rightarrow \infty$ فهل هذا يعني هذا تناقضاً ما ؟ وهل يطابق الواقع ؟ أي هل تكون كمية الحركة لانها ئية وبالتالي فالطاقة لانها ئية أيضاً ؟ الحقيقة أن لوجود لهذا التناقض لأن مكان الالكترتون في غرفة ويلسون غير محدد بدقة فهو معين بحجم قطيرة السائل المتكونة الذي هو من مرتبة 10^{-4} cm وبالتالي فان :

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\Delta x} \approx 10^{-23} \text{ gr. cm / sec.}$$

وبما أن كتلة الإلكترون من مرتبة 10^{-27} فان مقدار الخطأ في حساب سرعته في هذه الحالة يساوي :

$$\Delta v_x = \frac{1}{m} \Delta p_x = 10^4 \text{ cm/sec.}$$

وهذا المقدار كبير ولكن يمكننا قبوله إذا علمنا أن لالكترونات في غرفة ويلسون سرعة تتجاوز 10^9 cm/sec أي $\Delta v_x \ll v$ إذا وضعنا علاقة الشك (1.31) بالشكل :

$$\Delta x \Delta v_x \approx \frac{h}{m} \quad (1.34)$$

فاننا نستنتج أن الفيزياء الكلاسيكية تطبق بدقة تتناسب طردياً

مع m .
لنأخذ مثلاً جسيماً قطره 1 ميكرون وكتلته 10^{-10} ج.
فنجد :

$$\Delta x \Delta v_x \approx 10^{-17}$$

فاذا كان موضع هذا الجسيم معيناً بخطأ 10^6 cm فان مقدار الخطأ في تعيين سرعته هو :

$$\Delta v_x \approx 10^{-11} \text{ cm/sec.}$$

فاذا علمنا أن سرعة جسيم يتحرك بحركة براونية في مائع تقارب 10^4 cm/sec ، فانه يمكن قبول الخطأ السابق (10^{-11}) وهو يصغر مع كبر كتلة الجسيم .

ان هذه الملاحظات تقودنا الى ما يسمى مبدأ التقابل الذي يمكننا بواسطته الانتقال الى م . كلاسيكي إلى م . كم بتبديل h أو (h/m) بالصفر ، وهذا يعني اهمال كل التأثيرات التي تتناسب مع h فنحصل على القوانين الكلاسيكية المعروفة . فاذا أخذنا الجسيمات التي يتحقق بالنسبة لها أن المقدار h/m صغير جداً فانها

يمكننا مباشرة اهماله ، وهذا ممكن عندما تكون كتلة الجسم كبيرة (بالقياس الى الجسيمات المجهرية طبعاً) فمثلاً عندما $m = 1 \text{ gm}$ نجد :

$$\frac{h}{m} \approx \frac{10^{-27}}{1} = 10^{-27} \text{ erg. sec. / gr.}$$

وهو مقدار صغير جداً يمكن اهماله .
لنلاحظ أخيراً أن علاقات الشك تسمح لنا بإجراء بعض الحسابات التقريبية ، فإذا فرضنا أن الجسم يتحرك في مجال l أي أن $x = l$ فإن كمية حركته ستكون محصورة بالمجال :

$$P_x = \Delta P_x \approx \frac{h}{l}$$

وبالتالي فإن طاقته ستعطى بالعلاقة :

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2ml^2} \quad (1.35)$$

فإذا طبقنا هذه العلاقة على نوكلونات (بروتونات أو نوترونات) النواة التي قطرها يتراوح ما بين 10^{-13} cm و 10^{-12} cm مع العلم أن كتلة النوكلون تساوي $m_N = 1.66 \times 10^{-24} \text{ gm}$ فإننا نجد :

$$E = \frac{h^2}{2ml^2} = \frac{10^{-54}}{2 \times 1.66 \times 10^{-24} \times 10^{-25}} \text{ erg} \approx 1 \text{ MeV}$$

وهذه الطاقة تقارب في قيمتها الطاقة المقاسة تجريبياً مما يؤكد المعنى الفيزيائي لعلاقات الشك .

مسائل الفصل الأول

- 1 - أوجد ، باستخدام علاقات الشك، أصغر قطر لذرة الهيدروجين إذا علمت أن طاقة الإلكترون الحركية فيها تبلغ 10 eV .
- 2 - تتألف حزمة موجية من الموجتين المستويتين :

$$u_1(x,t) = \cos(4002t - 3x)$$

$$u_2(x,t) = \cos(4003t - 3.01x)$$
 أحسب سرعة الطور لكل موجة ثم سرعة المجموعة لهذه الحزمة الموجية ،
- 3 - من المعلوم أن سرعة الطور تعطى بالعلاقة $v_p = \omega/k$ ، أحسب هذه السرعة في الحالتين النسبية والكلاسيكية .
- 4 - يتحرك الكترون في شبكة بلورية قطرها $1 \mu\text{m}$ بطاقة حركية $T = 15 \text{ eV}$ أوجد الدقة في حساب سرعته .
- 5 - استخدم العلاقة $\Delta x \Delta p_x \approx \hbar$ لحساب طاقة السوية الأساسية في ذرة الهيدروجين إذا علمت أن أبعاد الذرة هي 1 \AA .
- 6 - أوجد أصغر قيمة لطاقة الهزاز التوافقي ، انطلاقاً من علاقات الشك .
- 7 - أعد السوء ال نفسه لحساب طاقة الكترون واقع على أقرب مدار من النواة .
- 8 - يوصف جسيم بالتابع التالي :

$$\psi(x) = A e^{-\frac{x^2}{a^2} + i k x}$$

- أ - أحسب الثابت A ثم أحسب $\langle p \rangle$ ، $\langle x \rangle$.
- ب - إذا فرضنا أن :

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

فاحسب المقدار $\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle$ لهذا الجسيم

الموصوف بالتابع $\psi(x)$ السابق .

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

9 - احسب تحويل فورييه (تكامل فورييه) للتابع

10 - برهن أن التابع $f(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(x-x')} dk$ الى تابع ديراك $\delta(x-x')$.

11 - برهن أن الموجة التالية :

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} & \text{if } |x| \leq l/2 \\ 0 & \text{if } |x| > l/2 \end{cases}$$

ليست مستوية عندما تأخذ l قيما صغيرة . عين المجال
 $\Delta k = k - k_0$ حيث يمكن اعتبار سعات الموجات المكونة
 لها لاتساوي الصفر ، ثم استنتج علاقة الشك $\Delta x \Delta p_x \approx \hbar$.



لهذا الجسم $\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle$

فاحسب المقدار

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

الموصوف بالتابع $\psi(x)$ السابق .

3 - احسب تحويل فورييه (تكامل فورييه) للتابع $f(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(x-x')} dk$

10 - برهن أن التابع $\delta(x-x')$ الى تابع ديراك

11 - برهن أن الموجة التالية :

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} & \text{if } |x| \leq l/2 \\ 0 & \text{if } |x| > l/2 \end{cases}$$

ليست مستوية عندما تأخذ l قيمة صغيرة . عين المجال

$\Delta k = k - k_0$ حيث يمكن اعتبار سعات الموجات المكونة

لها لاتساوي الصفر ، ثم استنتج علاقة الشك $\Delta x \Delta p_x \propto \hbar$.



الفصل الثاني

معادلة شرودنجر الموجية - تطبيقات

10- استنتاج معادلة شرودنجر :

(Schrödinger equation , Equation de Schrödinger)

رأينا في الفصل السابق أن التابع الموجي الذي يصف سلوك جسيم يتحرك حراً بكمية حركة P يعطى بالعلاقة :

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{P} \cdot \vec{r} - Et)} \quad (2.1)$$

وسنبحث في هذه الفقرة عن المعادلة التفاضلية التي حلها هو التابع ψ ، ثم نعمم ذلك فنستنتج معادلة شرودنجر لجسيم يتحرك في حقل كمون V . ولذلك نشق (2.1) أولاً بالنسبة للزمن ثم بالنسبة للاحداثيات فنجد :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} EA e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{P} \cdot \vec{r} - Et)} = -\frac{i}{\hbar} E \psi \quad (2.2)$$

فاذا علمنا أن :

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = p_x x + p_y y + p_z z$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

يمكن أن نحسب :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} p_x A e^{-\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z - Et)}$$

حيث نجد :

$$= \frac{i}{\hbar} p_x \psi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{i}{\hbar} p_x \psi \quad \frac{i}{\hbar} p_x \psi = -\frac{1}{\hbar^2} p_x^2 \psi$$

وكذلك :

وبالطريقة نفسها يتم حساب المقدارين الباقيين. وهكذا نجد :

$$\nabla^2 \psi = \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi \quad (2.3)$$

فاذا قارنا بين (2.2) ، (2.3) نجد بسهولة :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (2.4)$$

وهي معادلة شرودنغر لجسيم حر (غير خاضع لأي كمون) . ونلاحظ أنها معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالنسبة للزمن ومن المرتبة الثانية بالنسبة للاحداثيات ، وهي عقدية أيضاً أي أن حلها يجب أن يعطى بتابع عقدي . كذلك يمكن ملاحظة أن أي تركيب للتابع $\psi(\vec{r}, t)$ المعطى بالعلاقة (2.1) يمكن أن يكون حلاً لها كما هو معروف في أبحاث المعادلات التفاضلية الخطية ، ذلك الفرع الوحيد الموافق لميكانيك الكم ، تحقيقاً لمبدأ التراكب الذي أشرنا إليه في الفصل الأول .

إذا فرضنا أن الجسيم يتحرك بالاتجاه ox فمن الممكن أن يكون التابع :

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \quad (2.5)$$

أحد حلول المعادلة (2.4) فإذا حسبنا $\psi(x,t)$ ، $\psi(x)$ من (2.5) ثم بدلناها في (2.4) نجد بسهولة بعد الاختصار على $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ أن :

$$\nabla^2 \psi(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0 \quad (2.6)$$

وهي معادلة شرودنغر المستقرة (المستقلة عن الزمن) (Stationary , stationnaire) لجسيم حر .
لنبحث الآن عن معادلة شرودنغر المستقرة لجسيم يتحرك باتجاه x في كمون $V(x)$ ولذلك نلاحظ أن الطاقة E المعطاة بالعلاقة السابقة هي الطاقة الحركية أي كما رأينا :

$$E = T = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

ومن الطبيعي أنه لا يمكن اعتبارها ، عند تعميم المعادلة (2.6) ، الطاقة الكلية ؛ إذ لو صح ذلك لنتج بالتالي أن التابع الموجبي المقابل لا يتعلق بالكمون $V(x)$ وهذا مخالف للواقع ، فإذا علمنا أن الطاقة الكلية تساوي الطاقة الحركية مضافاً إليها الكامنة (أي أن $T = E - V(x)$) وبدلنا في (2.6) نجد معادلة شرودنغر المطلوبة في هذه الحالة :

$$\nabla^2 \psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi(x) = 0 \quad (2.7)$$

وحلها يعطي التابع $\psi(x)$ الذي يصف الجسيم في هذه الحالة . ولحساب التابع $\psi(x,t)$ نضرب $\psi(x)$ بـ $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ طبقاً لـ (2.5) .
أما الكثافة الاحتمالية لوجود الجسيم في نقطة x في اللحظة t

فتساوي ،

$$|\psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2 \quad (2.8)$$

وهي غير تابعة للزمن ، وهذه نتيجة طبيعية ، إذ أن احتمال وجود الجسيم الخاضع للكمون $V(x)$ ، غير المتعلق بالزمن ، في أي نقطة

في نقطة ما (الشروط الحدية) لنتمكن من تعيين الثانيين
المتعلقين بالاحداثيات ، باعتبار أن المعادلة من المرتبة الثانية
بالنسبة للاحداثيات ، وسنرى أن تلك الشروط (الحدية) الموصوفة على
التابع الموجي ستساعدنا في حساب طاقة الجسيم الموصوف بالتابع ψ ،
كما سنرى في الفقرات القادمة .

١١- كثافة التيار الاحتمالي (Probability current density) :

ان حل المعادلة (2.9) سيعطى بتابع من الشكل $\psi(\vec{r}, t)$ ،
وهو يصف سلوك الجسيم كما أنه يتغير بتغير المكان والزمن t ،
الأن هذا التغير لا يحدث كيفياً وسنبرهن أنه يخضع لعلاقة شبيهة
بمعادلة الاستمرار المعروفة في الفيزياء الاحصائية التي تعبر عن
انخفاض عدد الجسيمات ، لقد رأينا أن المقدار :

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 = \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = |\psi|^2$$

يمثل الكثافة الاحتمالية وأن المقدار $|\psi|^2 dV$ يمثل احتمال وجود
الجسيم في عنصر الحجم dV فالكمية $|\psi|^2 = \rho$ تلعب دور تابع التوزيع
الاحصائي في الفيزياء الاحصائية ودور كثافة المادة في جسيم ما ،
ومن المعلوم أن ρ يحقق في الفيزياء الاحصائية ما يسمى بمعادلة
الاستمرار (نظرية ليوفيل) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$$

وسنبرهن أن $|\psi|^2$ يحقق علاقة مشابهة هنا نحصل عليها فيما يلي :
لنكتب أولاً معادلة شرودنغر بالشكل :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi$$

ومرافقها العقدي :

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V \psi^*$$

لنضرب الأولى بـ ψ^* والثانية بـ ψ من اليسار ثم نطرح
فنجد أخيراً :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^* \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*)$$

وان $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$:

$$\nabla (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi + \Psi^* \nabla^2 \Psi - \nabla \Psi \cdot \nabla \Psi^* - \Psi \nabla^2 \Psi^* \\ = \Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*$$

(2.10)

نلاحظ ان $i\hbar$ ونقسم الطرفين على $i\hbar$

$$\frac{\partial (\Psi^* \Psi)}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2m} \nabla (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) = 0 \quad (2.11)$$

نلاحظ ان J بالعلاقة :

$$J = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) \quad (2.12)$$

نم لنستكمل طرفي (2.11) على الحجم V حيث توجد الجسيمات الموصوفة بالتابع Ψ فنجد :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \text{div } J dV = 0 \quad (2.13)$$

ويمكن تحويل التكامل الثاني الى تكامل على سطح بتطبيق نظرية غوس-أوستراغر-أدسكي :

$$\int_V \text{div } J dV = \oint_S J_n dS \quad (2.14)$$

حيث S السطح الذي يحد الحجم V ، فاذا بدلنا (2.14) في (2.13) فان التكامل يمثل عندئذ تغير عدد الجسيمات ضمن السطح

S في واحدة الزمن ، أما التكامل الثاني فيمثل عدد الجسيمات الخارجة من السطح S في واحدة الزمن .

وبما أن المعادلة (2.13) صحيحة من أجل أي حجم V فانه يمكن أن نكتب أخيراً معادلة الاستمرار في ميكانيك الكم كما يلي :

(2.15)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } J = 0$$

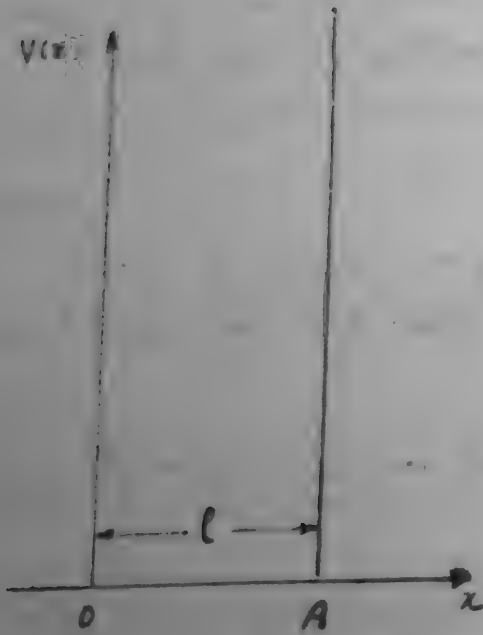
وهي تقابل قانون انحفاظ الجسيمات في الفيزياء الكلاسيكية، ولنذكر أخيراً أن J ، المعروف في (2.12)، يساوي الصفر عندما يكون Ψ حقيقياً.

تطبيقات على معادلة شرودنجر

١٢- دراسة جسيم في حفرة كمون لانهاية العمق

لندرس كتطبيق أول على معادلة شرودنجر ، حركة جسيم في حفرة مربعة معينة بالعلاقة :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < x < l \\ \infty & \text{if } x \leq 0, x \geq l \end{cases} \quad (2.16)$$



وهي موضحة بيانياً على الشكل (2.1) المرافق .

بما أن الطاقة الحركية T تساوي $E - V(x)$ وأن $V(x)$

لانهاية خارج المجال $0 < x < l$ و E محدودة و T لا يمكن أن

تكون سالبة ، إذن لا يمكن

أن يوجد الجسيم خارج الحفرة

الموضحة على الشكل (2.1)

فهو إذن يتحرك في المجال $0 < x < l$ ، فكأنه واقع في حفرة حقيقية لا يستطيع أن يخرج منها إلا عندما يتسلق جدرانها اللامتناهية في الارتفاع حسب (2.16) . أن هذا المثال البسيط سيساعدنا على فهم كثير من المجموعات الكوانتية ومما يجعل له أهمية أكثر هو أنه يطبق بتقريب مقبول لدراسة الإلكترونات في الذرة والنوكلونات في النواة .

لقد ذكرنا أن معادلة شرودنجر في ميكانيك الكم تشبه معادلة نيوتن في الميكانيك الكلاسيكي التي يساعدنا حلها على

شكل (2.1)

حفرة الكمون ذات الأبعاد

اللانهاية

نحسب موضع البعثة المادية في كل لحظة وبالتالي حساب طاقة هذه البعثة المادية . وهو ما نعلم به أكثر في م . الكم . وهناك مطلب من معادلة شرودنجر حساب التابع الموجي ψ الذي سيساعدنا على نفس موضع الجسيم في كل لحظة . أما طاقته فسنحسبها من الشروط الحدية التي يجب أن يخضع لها التابع ψ . لنلاحظ أولاً انعدام ψ في المجالين $x > l$, $x < 0$ لأن الجسيم لا يمكن أن يوجد هناك أي أن :

$$\psi(x > l) = \psi(x < 0) = 0$$

(2.17) كما أن ψ يجب أن تنعدم أيضاً عندما $x = 0$, $x = l$ بسبب الشروط العامة لاستمرارية التابع الموجي أي :

$$\psi(x = 0) = \psi(x = l) = 0$$

(2.18) لكتب الآن معادلة شرودنجر المستقرة داخل الحفرة فنجد بسهولة :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + K^2\psi = 0 , \quad (K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}) \quad \text{أو :} \quad (2.19)$$

وهو العدد الموجي نفسه حسب التعريف . ان حل المعادلة السابقة سهل وهو :

$$\psi = A \sin(Kx + \alpha) \quad (2.20)$$

حيث A , α ثابتا التكامل يعينان من الشروط الحدية . لنعين أولاً الثابت α فنستخدم الشرط $\psi(0) = 0$ فنجد بفرض $A \neq 0$:

$$\psi(0) = A \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

أما الشرط $\psi(l) = 0$ فيعطي :

$$\psi(l) = A \sin Kl = 0$$

ومن ثم :

$$k l = n \pi$$

(2.21)

حيث n عدد صحيح. ففي الحالة الخاصة عندما $n=0$ نجد $k=0$ وبالتالي فإن طاقة الجسيم (التي تساوي طاقته الحركية هنا، $v=0$) تساوي الصفر و $\lambda=\infty$ أيضاً؛ وينعدم وجود الجسيم في كل نقط الفراغ ، وليس لهذا أي معنى فيزيائي ، فهذا الحـل مرفوض ولذلك نأخذ $n \geq 1$ أما طاقة الجسيم E فيمكن أن تحسب من (2.19) و (2.21) حيث نجد :

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m l^2} n^2 \quad (2.22)$$

وهذا سيعني أنه سيكون للجسيم في حفرة الكمون المربعة طاقة متقطعة وليست مستمرة كما في الميكانيك الكلاسيكي ويقال أن الطاقة مكتمة .

ان أصغر طاقة يمكن أن يأخذها الجسيم تنتج من أجل $n=1$:

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m l^2} \quad (2.23)$$

وتسمى E_1 الطاقة الأساسية (السوية الأساسية للطاقة) أما السويات الباقية التي نحصل عليها عندما $n=2,3,4,\dots$ فتسمى السويات المهيّجة ، أما جملة هذه السويات فتكوّن ما يسمى طيف الطاقة (أو سويات الطاقة Energy levels) الموضح على الشكل (2.2). لنلاحظ أن طاقة السوية الأساسية لا تتعارض مع علاقات الشك ومن السهل البرهان على ذلك إذا اعتبرنا أن الجسيم موجود في المجال $0 < x < l$ (أي أن $\Delta x \simeq l$) ثم حسبنا كمية حركته حسب علاقة الشك فنجد :

$$p = \Delta p \simeq \frac{\hbar}{\Delta x} \simeq \frac{\hbar}{l}$$

أما الطاقة E فتساوي

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m l^2}$$

وهو ما يشبه العلاقة (2.23) • $E_{n+1} < E_n$ هو:
ان السبع ما بين سويتي الطاقة

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m l^2} [(n+1)^2 - n^2] = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m l^2} (2n+1) \quad (2.24)$$

فمن أجل n معينة (سوية الطاقة ذات الرقم n) نجد أن هذه
المسافة تكبر عندما تصغر كتلة الجسم m ويصغر المجال الذي

يمكن أن يكون فيه :

$$l = 5 \times 10^{-8} \text{ cm} \text{ فمثلاً عندما}$$

(أبعاد الذرة)

$$m = 10^{-27} \text{ g}$$

(كتلة الإلكترون)

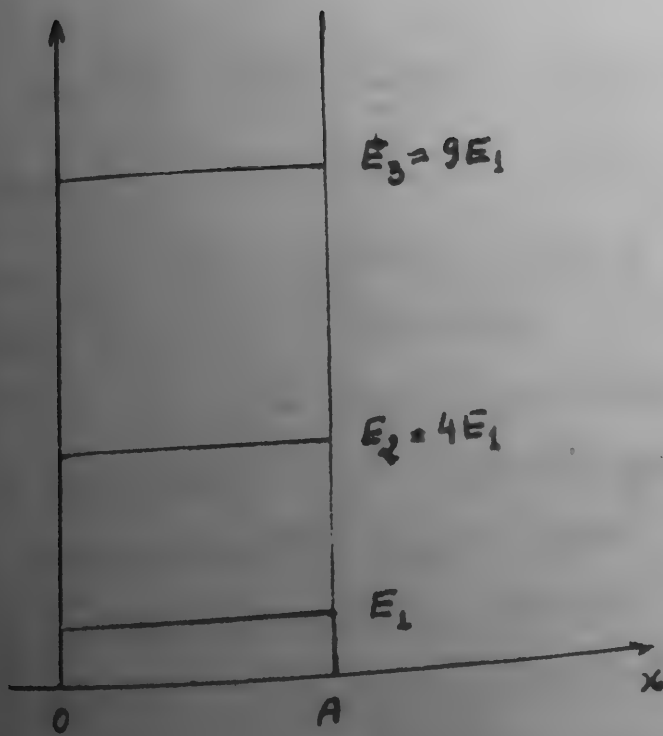
نجد بالحساب أن

$$\Delta E = 1 \text{ eV}$$

وهو مثال الالكترونات

حول النواة • أمّا

$$l = 10 \text{ cm} \text{ عندما}$$



شكل (2.2)

سويات الطاقة

$m = 10^{-23}$ ج $\Delta E = 10^{-20}$ eV فنجد (حالة الجسيمات الكبيرة) فإذا قورنت هذه الطاقة مع طاقة الجسيم الحرارية kT (k ثابت بولتزمان ، T درجة الحرارة المطلقة) التي تساوي 0.025 eV نجد أنها صغيرة جداً بالنسبة إلى kT ، أي أن $\Delta E/E \rightarrow 0$ وبالتالي يمكن اعتبار طاقة الجسيمات الكبيرة مستمرة وتأخذ جميع القيم وليست متقطعة كما في حالة الجسيمات المجهرية .

لنحسب أخيراً البعد النسبي بين سويات الطاقة $\Delta E_n/E_n$ فنجد عندما يكون n كبيراً :

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} \approx \frac{1}{n} \quad (2.25)$$

وهي تنتهي إلى الصفر عندما $n \rightarrow \infty$ وهذا يعني أنه لا يوجد طيف طاقة متقطع للسويات العليا المهيجة وهذا يتوافق مع التجربة حيث أن للذرات والنويات طيف طاقة متصلاً عند تلك السويات وكلما زاد بعد السوية المهيجة عن السوية الأساسية ازداد اتصاف السويات بعضها ببعض .

لنعين الآن الثابت A من الشروط العامة لتنظيم التتابع المذكورة في الفصل الأول . ان التابع الموجي الموافق لسوية الطاقة ذات الرقم n هو :

$$\psi_n = A_n \sin Kx = A_n \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (2.26)$$

حيث تحسب A_n من شرط التنظيم التالي :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_n dx = \int_0^l |A_n|^2 \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx = 1$$

ومنـه :

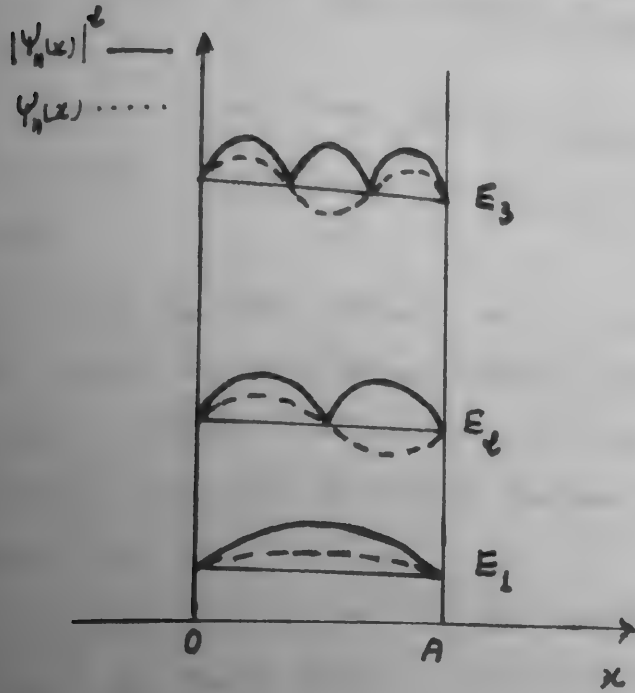
$$I = |A_n|^2 \frac{l}{2} = 1 \Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \quad (2.27)$$

أي أن A تساوي قيمة ثابتة لكل السويات (لا تتعلق بـ n) وبالتالي يمكن كتابة ψ_n في الحالة العامة :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

(٢.٢٨)

لنعرض موضع الجسيم ولهذا نرسم التتابع الموجية ψ_n ومربعاتها $|\psi_n|^2$ ويسهل تحقيق هذا برسم التابع ψ_n في المجال $0 < x < l$ ثم ترسيم كل نقطة منه فنحصل على الشكل (٢.٣) حيث يمثل الخط المنقط $\psi_n(x)$ والخط المتمثل $|\psi_n(x)|^2$.



وهكذا نجد أن احتمالات وجود الجسيم في حفرة الكمون، مختلفة وتتغير بشكل جيبي، أي أن هناك نقاطاً ضمن الحفرة يكون احتمال وجود الجسيم فيها معدوماً وأخرى يكون أعظماً. أما في الميكانيك الكلاسيكي فإن هذا الاحتمال سيكون متناسباً مع الزمن الذي يمكن أن يوجد خلاله الجسيم في المجال $dx = l$ أي :

شكل (٢.٣)

الخط البياني الدال على تغيرات $\psi_n(x)$ و $|\psi_n(x)|^2$ من أجل $n = 1, 2, 3$.

($\psi_n(x)$ خط متقطع)
($|\psi_n(x)|^2$ ——— خط متصل)

(٢.٢٩)

وبما أن الجسيم لا يخضع داخل الحفرة لأي كمون ($V = 0$) فالقوة المؤثرة عليه معدومة وبالتالي سيتحرك بحركة منتظمة حسب قانون نيوتن

الأول أي $dW/d\mathbf{r} = \text{const.}$ ؛ فاحتمال وجود الجسم في أي نقطة من الحفرة غير متعلق بـ x وهو يساوي مقداراً ثابتاً ، ويؤول متوسط الاحتمال الكوانتي الموضح في الشكل (2.3) إلى $W/d\mathbf{r}$ عندما $n \rightarrow \infty$.

نلخص الآن النتائج التي حصلنا عليها من دراسة الجسم في حفرة كمون :

- 1 - ان لطاقة الجسم المجهرى المتحرك في حفرة كمون قيماً متقطعة.
- 2 - حتى في الحالة الأساسية (عندما $n=1$ ، $E=E_1$) لا يكون الجسم ثابتاً وإنما له طاقة حركية معينة E_1 .
- 3 - ان خاصية تقطع الطاقة تظهر بوضوح عند الجسيمات ذات الكتلة الصغيرة التي تتحرك في حيز ضيق .
- 4 - عندما تأخذ E قيماً كبيرة فإننا نحصل على علاقات كلاسيكية كما هو الحال بالنسبة للمقدار $\Delta E_n/E_n$ الذي ينتهي الى الصفر عندما $n \rightarrow \infty$ وهذه حالة خاصة من مبدأ التقابل عندما ننتقل من م . كلاسيكي الى م . كم .

13 - دراسة جسيم في حفرة لانهائية ذات ثلاثة أبعاد :

ليست هذه الحالة سوى تعميم مباشر للحالة السابقة فلنفرض أن الحفرة محددة بالعلاقات :

$$0 < x < l_1 , \quad 0 < y < l_2 , \quad 0 < z < l_3$$

المحددة لمجال حركة الجسم ، وعندئذ يمكن كتابة معادلة شرودنغر بالشكل :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = E \psi \quad (2.30)$$

أما الشروط الحدية الموافقة لهذه الحالة فهي :

$$\left. \begin{aligned} \psi(0, y, z) = \psi(x, 0, z) = \psi(x, y, 0) = 0 \\ \psi(l_1, y, z) = \psi(x, l_2, z) = \psi(x, y, l_3) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

وسهل حل المعادلة (2.34) بالاستناد الى نظرية فصل
المحولات في المعادلات التفاضلية الجزئية فنجد أخيراً ثلاث معادلات
من الشكل (2.35) تتعلق كل منها بأحد المتحولات وتوافق ثلاث
طاقات E_1, E_2, E_3 مجموعها يساوي الطاقة الكلية E في (2.35).
وهذه المعادلات من الشكل :

$$\frac{\nabla^2 \psi_i(x_i)}{\nabla^2} + k_i^2 \psi_i(x_i) = 0 \quad (2.35)'$$

حيث $i = 1, 2, 3$ وكذلك $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

ويكون التابع الموجي الكلي هو جداء التوابيع ψ_i بحيث يكون:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \psi_1(x) \psi_2(y) \psi_3(z) = \\ &= B \sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z \end{aligned} \quad (2.36)$$

حيث :

$$\frac{\hbar^2}{2m} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = E$$

ومن الشروط الحدية (2.34) نجد :

$$k_1 l_1 = n_1 \pi, \quad k_2 l_2 = n_2 \pi, \quad k_3 l_3 = n_3 \pi \quad (2.37)$$

وعندئذ تكون طاقة الجسيم (تعميم العلاقة (2.37) :

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} + \frac{n_3^2}{l_3^2} \right) \quad (2.34)$$

أما التابع الموجي فسيكون أيضاً تعميماً للعلاقة (2.28) ، حيث نجد أخيراً (بعد تعيين الثابت B) :

$$\psi_{n_1, n_2, n_3} = \sqrt{\frac{8}{l_1 l_2 l_3}} \sin \frac{\pi n_1}{l_1} x \sin \frac{\pi n_2}{l_2} y \sin \frac{\pi n_3}{l_3} z \quad (2.35)$$

في الحالة الخاصة عندما تكون الحفرة بشكل مكعب حرفه l أي عندما $l_1 = l_2 = l_3 = l$ نجد قيمة الطاقة :

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m l^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \quad (2.36)$$

وهي تتعلق بمجموع مربعات الأعداد الصحيحة n_1, n_2, n_3 فكمما تحولت هذه الأعداد (وبالتالي تغيرت التوابع الموجية الموافقة لها) بحيث يبقى مجموع مربعاتها ثابتاً فإن الطاقة لا تتغير وعندئذ يقال أن سويات الطاقة منطبقة (أو متوالدة) (Degenerate) ودرجة انطباقها هو عدد الحالات الممكنة لتغير التوابع الموجية المقابلة للطاقة نفسها .

لنأخذ مثلاً على ذلك فنفرض أن : $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6$

وعندئذ تكون الطاقة :

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m l^2} 6$$

وبما أن n_1, n_2, n_3 أعداداً صحيحة موجبة فسنحصل على الحالات الثلاث التالية :

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 1 \\ 2) \quad n_1 = 1, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 1 \\ 3) \quad n_1 = 1, \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 2 \end{array} \right\} \quad (2.37)$$

ولكل مجموعة منها تابع موجي مختلف هي : ψ_{111} , ψ_{112} , ψ_{211}
 عر أن الطاقة هي نفسها للجميع فسويات الطاقة منطبقة ودرجة انطباقها تساوي ثلاثاً في هذه الحالة .

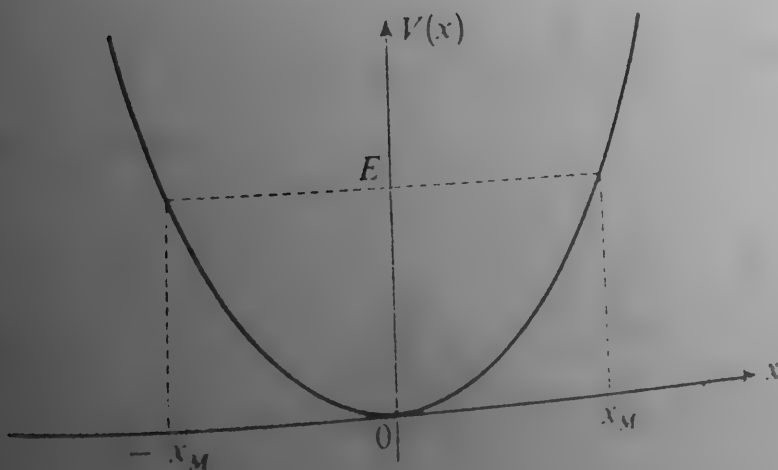
14 - الهزاز التوافقي : (The harmonic oscillator , L'oscillateur harmonique)
 ٢ - حل معادلة شرودنغر ، حساب الطاقة :

سندرس الآن تطبيقاً آخر لمعادلة شرودنغر وهو دراسة حركة مستقيمة اهتزازية بين نقطتين حول وضع التوازن وهي حالة اهتزاز الذرات في الجزيئات ثنائية الذرة ، أما اهتزاز البلورة فيمكن أن يحلل الى مجموعة من الاهتزازات التوافقية ، ولذلك كان للحركة التوافقية في م.كم أهمية الحركات الجيبية (أو الحركات الدورية بصورة عامة) في الفيزياء الكلاسيكية .

من المعلوم أن الطاقة الكامنة هي $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ الموضحة بياناً على الشكل (٢.٤) ، أما القوة المؤثرة على الجسيم فهي :

$$\vec{F} = - \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} = - m \omega^2 x \vec{i} = - \alpha x \vec{i} \quad (2.38)$$

حيث \vec{i} متجهة الوحدة على المحور ox ، وهذا يعني أن \vec{F} تتجه دائماً نحو مركز الاحداثيات مما يجعل النقطة المادية تتحرك دوماً بحركة خطية



شكل (٢.٤)
 كمون الهزاز التوافقي

حول النقطة 0 (وضع التوازن) بين النقطتين A و B كما في الشكل (2.5) .

ولحل هذه المسألة

في م . الكم نعوض

الكمون $\frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

في معادلة

شرودنجر الموافقة

فنجـد :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \psi = E \psi \quad (2.39)$$

ثم نأخذ متحولاً جديداً η وثابتاً جديداً λ حسب العلاقتين :

$$\eta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad , \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} \quad (2.40)$$

فنجـد بالتبديل في (2.39) المعادلة :

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2} - \eta^2 \psi = \lambda \psi \quad (2.41)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية يمكن أن تحل بسهولة على طريقة السلاسل . ومن الواضح أن طاقة الجسيم E متعلقة بالثابت λ الذي يحسب بتطبيق الشروط الحدية على التابع الموجبي

المحقق للمعادلة (2.41) .

لنبحث أولاً عن الحل التقاربي لها عندما η (وبالتالي x) تنتهي إلى اللانهاية وعندئذ يمكن إهمال الطرف الثاني بسبب صغره بالنسبة للطرف الأول فنحصل على المعادلة :

$$\psi'' - \eta^2 \psi = 0 \quad (2.42)$$

نشتق مرتين فنجد :

$$\psi'' = (4\eta^2 \psi + 2\psi) e^{\eta^2} \approx 4\eta^2 \psi e^{\eta^2}$$

نبحث عن حل لها من الشكل

وبالتعويض في (2.42) ثم الاختصار على $e^{\frac{\lambda}{2}y}$ نجد :

$$4\lambda^2 y^2 - y^2 = 0$$

ومنه $\lambda = \pm \frac{1}{2}$. وعندئذ يكون الحل التقاربي :

$$\psi_{\infty} = c_1 e^{-\frac{1}{2}y} + c_2 e^{+\frac{1}{2}y}$$

وبما أن التابع الموجي يجب أن يكون محدوداً باعتبار أن الجسم يقع في حيز معين فإن الحد الثاني يجب أن ينعقد وبالتالي $c_2 = 0$ ، أما c_1 فيمكن اعتبارها مساوي الواحد لأن التابع الموجي غير منظم حتى الآن وهكذا نجد الحل التقاربي :

$$\psi_{\infty} = e^{-\frac{1}{2}y}$$

(2.43)

لنبحث الآن عن الحل العام للمعادلة (2.31) ولهذا نفتش عن

حل من الشكل :

$$\psi(y) = \psi_{\infty} u(y) = e^{-\frac{1}{2}y} u(y) \quad (2.43')$$

نشتق مرتين ونبدل :

$$\psi''(y) = [e^{-\frac{1}{2}y} u(y)]'' = u'' - 2yu' + (y^2 - 1)u e^{-\frac{1}{2}y}$$

$$u'' - 2yu' + (\lambda - 1)u = 0 \quad (2.44)$$

وهي معادلة خطية من المرتبة الثانية نحلها بطريقة السلاسل :

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k, \quad u' = \sum_{k=0}^{\infty} b_k k y^{k-1} \\ u'' &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k k(k-1) y^{k-2} \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

وبالتبديل في (2.44) نحصل على المعادلة :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k [k(k-1) y^{k-2} - (2k+1-\lambda) y^k] = 0 \quad (2.46)$$

فاذا بدلنا الآن في السلسلة الأولى كل k بـ $k+2$ لكي نجعل المعادلة متجانسة بالنسبة y^k فإننا نحصل على المطابقة :

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^k [(k+2)(k+1) b_{k+2} - (2k+1-\lambda) b_k] \equiv 0 \quad (2.47)$$

ولكي تتحقق هذه المطابقة من أجل كل الحدود (أي مهما كانت قيم k) يجب ، كما هو معلوم ، أن تساوي الصفر أمثال y^k حيث $k = 0, 1, 2, \dots$ ومنه نجد :

$$b_{k+2} = \frac{2k+1-\lambda}{(k+2)(k+1)} b_k \quad (2.48)$$

وهي تربط بين الأمثال b_k و b_{k+2} ، فإذا بدأنا من الصفر (زوجي) فستكون كل السلسلة زوجية ، أما إذا بدأنا من الواحد (فردي) فستكون كل السلسلة فردية .

أن شروط محدودية التابع الموجي تلزم تقارب السلسلة ولذلك لابد أن تنقطع عند قيمة ما k بحيث يكون $k = n$ (مرتبة أعلى حد في السلسلة) :

$$b_k \neq 0, \quad b_{k+2} = 0 \quad (2.49)$$

فعندئذ نجد من (2.48) أن $2n+1-\lambda = 0$ ومنه نجد شرط انقطاع السلسلة وبالتالي محدودية التابع الموجي :

$$\lambda = 2n+1 \quad (2.50)$$

ومن هذه المعادلة يجب أن نحسب طاقة الجسيم التي نحصل عليها دائماً من الشروط الحدية ، كما رأينا في الفقرة السابقة ، فإذا رجعنا إلى (2.45) وبدلنا λ بقيمتها نحصل على الطاقة :

$$2E/\hbar\omega = 2n+1$$

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

ومنـه :

$$(2.51)$$

وهنا يختلف الأمر عن حفرة الكمون إذ يمكن لـ n العدد الصحيح أن يساوي الصفر وعندئذ نحصل على طاقة السوية الأساسية $E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$ وهي لا تساوي الصفر . وهكذا نستنتج أن للهزاز التوافقي طاقة متقطعة وتختلف

بعضها عن بعض بمقدار $\hbar \omega$ ويمكن تمثيلها كما في حفرية الكمون، كميات طاقة أخفضها السوية E_0 المقابلة لـ $n=0$ والمعبية بالعلاقة (٢.٥١) ، هذا ويمكن التحقق تجريبياً من وجود E_0 بدراسة تناسر الضوء على البلورات التي درجة حرارتها قريبة من الصفر المطلق (٢.٥٠) .

ب- التوابع الموجية وتعيين مكان الجسم :

لنبحث الآن عن التوابع الموجية الموافقة لقيم الطاقة الانغصة الذكر (التوابع الخاصة) (٢.٥١) حتى نستطيع تعيين موضع الجسم في كل لحظة ولذلك نلاحظ من (٢.٤٣) ومن (٢.٤٣) أن الحل العام سيكون :

$$\psi_n = A_n e^{-\frac{1}{2}\eta^2} u(\eta) \quad (2.52)$$

حيث A_n ثابت يعين من شروط التنظيم و $u(\eta)$ حل المعادلة (٢.٣٩) وهو كما رأينا كثيرة حدود تتعين من (٢.٤٥) حسب الشروط (٢.٤٩) تسمى كثيرة حدود هرميت ، ويبرهن في الرياضيات أنها من الشكل :

$$u(\eta) = H_n(\eta) = (-1)^n e^{\eta^2} \frac{d^n e^{-\eta^2}}{d\eta^n} \quad (2.53)$$

ويسهل برهان أن (٢.٥٣) تحقق المعادلة (٢.٤٤) أي :

$$\frac{d^2 H_n}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dH_n}{d\eta} + 2n H_n = 0$$

ومن المفيد كتابة التوابع الأولى من السلسلة H_n انطلاقاً من (٢.٥٣) حيث نجد بسهولة :

$$\left. \begin{aligned} H_0(\eta) &= 1, & H_2(\eta) &= 2\eta^2 \\ H_2(\eta) &= 4\eta^2 - 2, & H_3(\eta) &= 8\eta^3 - 12\eta \\ H_4(\eta) &= 16\eta^4 - 48\eta^2 + 12 \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

لنحسب أخيراً الثابت A_n فنجد :

$$A_n = \left(\frac{m\omega}{\hbar^2} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{n! 2^n} \right)^{1/2} \quad (2.55)$$

وللحصول على الشكل العام للتابع الموجي نبذل A بقيمتها في (2.54) فنجد بعد ملاحظة (2.53) أن :

$$\psi_n = \left(\frac{m\omega}{\hbar^2} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{n! 2^n} \right)^{1/2} (-1)^n e^{\frac{1}{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar^2} \right)^{1/2} x^2} \frac{d^n e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar^2} \right)^{1/2} x^2}}{dx^n} \quad (2.54)'$$

ويمكن البرهان أن التوابع ψ_n تحقق شرطي التوحيد والتعامد التاليين (التوابع) :

$$\int \psi_n \psi_{n'} dx = \delta_{nn'} = \begin{cases} 1 & \text{if } n = n' \\ 0 & \text{if } n \neq n' \end{cases} \quad (2.56)$$

لنرسم الآن التوابع الموجية الموافقة لـ $n = 0, 1, 2, 3$ وذلك بحساب الصيغة الصريحة لكل منها اعتباراً من (2.54)' فنحصل على

الشكل (2.6)

حيث يمثل هذا الشكل

التوابع الموجية

الموافقة لقيم n

السابقة ويلاحظ أن

التابع المقابل

لـ $n = 0$

لا ينعدم (ينعدم

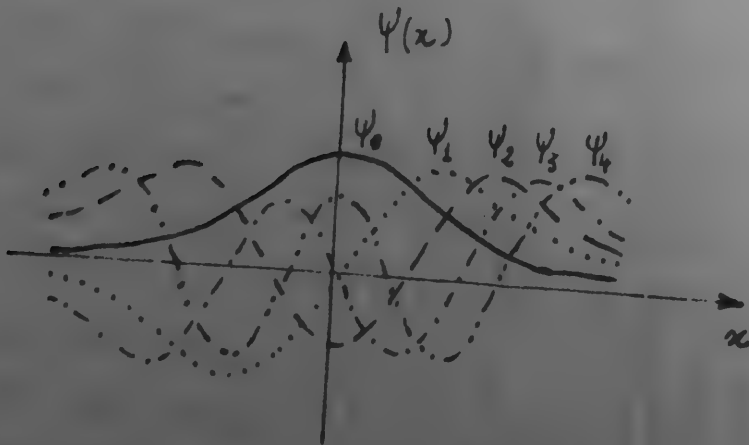
صفر مرة) أما التابع

ψ_1 فينعدم مرة

واحدة و ψ_2 مرتين ... وهكذا ولهذه الانعادات معني فيزيائي

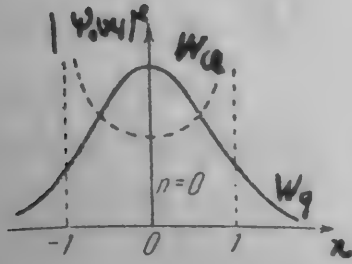
اذ يكون احتمال وجود الجسيم معدوماً في تلك النقط وتسمى عقود

التابع الموجي .

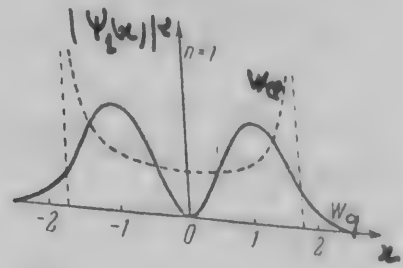


شكل (2.6)

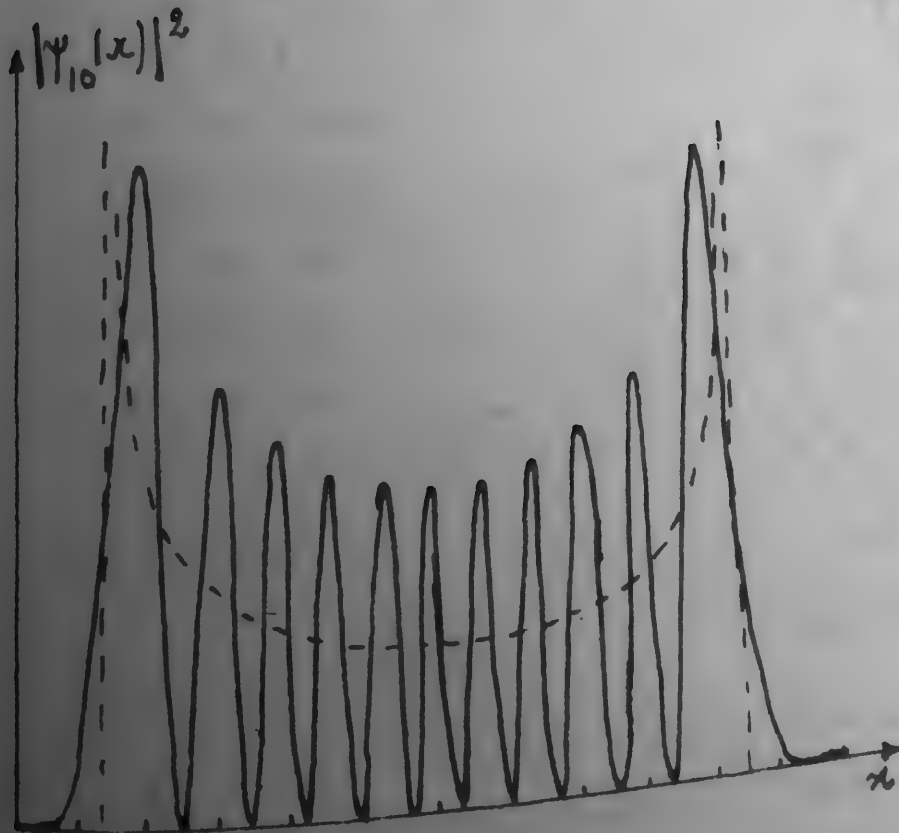
لندرس بالتفصيل احتمال وجود الجسيم المتحرك بحركة توافقية في
الحالتين $n=0,1$ فنلاحظ أن $|\psi_0|^2 \neq 0$ لا ينعدم ويمكن رسمه كما
في الشكل (2.7) أما عندما $n=1$ فيسهل رسم الاحتمال
كما في الشكل (2.8) ففي الحالة الأولى يكون الاحتمال في
أعظم في النقطة $x=0$ وفي الحالة الثانية ينعدم الاحتمال في
نلك النقطة غير أنه يصبح أعظم في النقطتين $(-1, +1)$



شكل (2.7)



شكل (2.8)



شكل (2.9)

أما حسب الميكانيك
الكلاسيكي فإن
وجود الجسيم في
مكان ما تابع
للزمن الذي يقضيه
في ذلك المكان
وبما أنه في
حالة الهزاز
التوافقي ستكون
هذه المدة عندما
يكون المطال
أعظم فإن
الاحتمال
الكلاسيكي W_d

سيكون أكبر هناك وبالتالي يمكن رسم الخط البياني المصغّر المقابل لـ W_q في الشكلين (2.7) و (2.8)، وأخيراً يمكن أن نلاحظ أن الاحتمال الكوانتي W_q يقترب من W_d عندما تزداد n وتزداد عقد التابع ψ فنحصل على الشكل (2.9) وهذه نتيجة متوقعة حسب مبدأ التطابق إذ أن ازدياد n معناه صغر المقدار $\Delta E/E$ (اقتراب سويات الطاقة بالنسبة لقيمها) .

جـ - الهزاز التوافقي ذو الأبعاد الثلاثة :

Harmonic oscillator in 3 - dimensions

Oscillateur harmonique à trois dimension

كثيراً ما نحتاج إلى دراسة الهزاز التوافقي في ثلاثة أبعاد فراغية حيث يهتز الجسم على ثلاثة محاور x, y, z وعندئذ يمكن تعميم النتائج السابقة بالشكل التالي :

يعطى الكمون في هذه الحالة بالعلاقة :

$$V(x, y, z) = \frac{m\omega_1^2}{2} x^2 + \frac{m\omega_2^2}{2} y^2 + \frac{m\omega_3^2}{2} z^2 \quad (2.57)$$

ويمكن كتابة معادلة شرودنجر الموافقة :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{m}{2} (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2) \psi = E \psi \quad (2.58)$$

وبما أن المؤثر التفاضلي قد انقسم إلى ثلاثة أقسام فيمكن تفرق المعادلة السابقة إلى ثلاث معادلات من الشكل (2.39) أي :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_i(x_i)}{dx_i^2} + \frac{m\omega_i^2}{2} x_i^2 \psi_i(x_i) = E_i \psi_i(x_i) \quad (2.59)$$

حيث :

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad i = 1, 2, 3$$

أما الحل العام للمعادلة (2.58) فيمكن كتابته كتعميم للناتج السابقة حيث نجد :

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{m^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3}{\hbar^3 \pi^3} \right)^{1/4} \left[\frac{e^{-\frac{1}{2}(n_1+1/2)\eta_1}}{\eta_1! n_1!} \right]^{1/2} e^{-\frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)}$$

$$H_{n_1}(\eta_1) H_{n_2}(\eta_2) H_{n_3}(\eta_3) \quad (2.60)$$

$$(\eta_i = \sqrt{\frac{m \omega_i}{\hbar}} x_i)$$

أما الطاقة فتكون من الشكل :

$$E = (n_1 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_2 + (n_3 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3 \quad (2.61)$$

وفي الحالة الخاصة عندما تتساوى تواترات الاهتزاز حول المحاور
الاحداثية x_1, x_2, x_3 أي $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ يكون :

$$E_n = (n + 3/2) \hbar \omega, \quad (n = n_1 + n_2 + n_3) \quad (2.61)'$$

أي أن E_n تتعلق بمجموع الأعداد الكوانتية n_1, n_2, n_3 فإذا
أخذت n قيمة معينة فإننا نجد مجموعة من الأعداد n_i مجموعها
يعطي n وهذا يعني أن مستويات الطاقة هنا منطبقة أيضاً كما في
حالة حفرة الكمون (ما عدا الحالة التي يكون فيها $n = 0$).
ولحساب درجة الانطباق ينبغي حساب عدد الحالات الممكنة للأعداد
 n_i ($i = 1, 2, 3$) بحيث يكون $n = n_1 + n_2 + n_3$ ولذلك نثبت n_1
(بالإضافة إلى n طبعاً) فنلاحظ عندئذ أن هذا العدد يساوي عدد
الحالات الممكنة للمقدار $n_2 + n_3$ الذي يمكن أن يأخذ القيم من
الصفر إلى $n - n_1$ أي $0, 1, 2, \dots, (n - n_1)$ وعددها
قيمة فإذا جمعنا الآن بالنسبة لـ n_1 التي يمكن أن تتحول من
الصفر حتى n نجد أن عدد الحالات الممكنة للمجموع
 $n_1 + n_2 + n_3$ (درجة الانطباق) هو :

وهي سلسلة عددية أساسها الواحد وعدد حدودها $\sum_{n_1=0}^n (n - n_1 + 1)$
(لأن n_1 يمكن أن تأخذ كل القيم من 0 (أصغر قيمة) إلى n
(أكبر قيمة، تقابل أصغر قيمة للعديدين n_2, n_3 حيث يساوي كل

• منهما الحفر)
وهكذا يكون مجموع المتوالية السابقة هو :

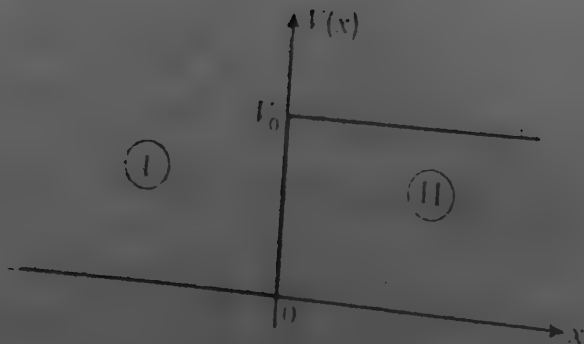
$$(2.62) \quad \frac{1}{2} (n+1+1) (n+1) = \frac{1}{2} (n+1) (n+2)$$

وهذا يعني أن سوية الطاقة ذات الرقم n ستكون موزعة من اطاق
($\frac{1}{2} (n+1) (n+2)$) سوية طاقة .

15- نفوذية وانعكاس الجسيمات على حاجز الكمون :

قد يتحرك الجسيم في حقل كمون من نوع خاص فهو لا يتأثر
بهذا الحقل الا عندما يقع ضمن منطقة معينة ، فعندما نفقد
بروتونا باتجاه النواة الموجبة فلا بد أن يخضع لتأثيرها الدافع
عندما يقع في مجالها الكهربائي (حاجز كمون كهربائي) و اذا كانت
طاقة البروتون كافية واستطاع التغلب على هذا الحاجز مندفعاً
باتجاه مركز النواة فهو سيتأثر فيما بعد بحقل كمون النواة
(حاجز كمون نووي) . وسندرس الآن أبسط هذه الحالات ولكنها، رغم
بساطتها، تفسر كثيراً من الظواهر الفيزيائية في هذا المجال .
فلنفرض حاجزاً للكمون يمكن أن يمثل جريباً بالعلاقة :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ V_0 & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad (2.63)$$



شكل (2.10)

وهذا يمثل بياناً كما في

الشكل (2.10) •

ولندرس سلوك جسيم مجهري
يتأثر بهذا الكمون ولذلك
نكتب معادلة شرودنغر
الموافقة :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

وفي حالسا هذه يعني كتابة معادلتين موافقتين لـ $x \leq 0$ أو $x > 0$ هما التاليان :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi &= 0 & : x \leq 0 \text{ (a) I} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} + k'^2\psi &= 0 & : x > 0 \text{ (b) II} \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \text{ (a)}, k'^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \text{ (b)} \quad \text{حيث :} \quad (2.65)$$

أما حل المعادلتين (2.64) فيكتب في الحالة العامة :

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(x) &= A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & (a) \\ \psi_2(x) &= A_2 e^{ik'x} + B_2 e^{-ik'x} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

من المعلوم أن e^{ikx} تمثل موجة مستوية (كما رأينا في الفصل الأول) تتجه بالاتجاه الموجب للمحور ox أما e^{-ikx} فتمثل موجة مستوية أيضاً ولكنها تتجه بالاتجاه السالب للمحور ox وبالتالي فكل من التابعين ψ_1 , ψ_2 مؤلف من موجتين مستويتين تنتشران باتجاهين متعاكسين وسنناقش ذلك بتفصيل أكثر فيما يلي :

لنلاحظ أولاً أن A_1, A_2, B_1, B_2 الممثلة لسعات الموجات المختلفة هي ثوابت التكامل وسنعيّنها من الشروط الحدية وشروط استمرار التابع الموجي ومشتقاته في النقطة $x = 0$ إذ أن :

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0) & (a) \\ \psi_1'(0) &= \psi_2'(0) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

وقبل أن نبدل المعادلتين (٢.٦٦) في (٢.٦٦) يمكن
البرهان أن الثابت $\beta_2 = 0$ في الحالتين $E < V_0$, $E > V_0$ (حيث
 E طاقة الجسيم الوارد) ؛ فعندما $E < V_0$ نجد من (٢.٦٦-ب)
أن $k'^2 < 0$ أي k' عدد تخيلي وعندئذ يصبح المقدار $k'x$ من
الشكل $e^{\alpha x}$ حيث α عدد حقيقي موجب وهذا يعني أن التابع
(٢.٦٦) يصبح لامتناهياً عندما $x \rightarrow \infty$ وهذا غير ممكن بسبب
محدودية التابع الموجي . أما إذا كان $E = V_0$ فإن $k' = 0$ وعندئذ
يساوي التابع ψ مقداراً ثابتاً ، وهي حالة خاصة لاستدعي الاهتمام
أما إذا كان $E > V_0$ فإن $k'^2 > 0$ وبالتالي k' حقيقي وهذا يعني
وجود موجة مستوية في المجال II متجهة بعكس اتجاه x وهو
غير ممكن لأنه لا توجد ضمن المجال II سوى الموجة النافذة المنحبة
باتجاه x إذ ليس هناك أي حاجز في المجال II ليعكسها .
لنعد الآن إلى المعادلتين (٢.٦٦) ونميز حالتين :

آ - إذا كانت طاقة الجسيم الوارد أكبر من ارتفاع حاجز الكمون
أي $E > V_0$ فنجد بالتبديل في (٢.٦٦) (بعد حساب
المشتقات) المعادلتين :

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 \\ k(A_1 - B_1) &= k'A_2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

لندرس الحالة الخاصة عندما $A_1 = 1$ (سعة الموجة الواردة تساوي
واحدة السعة) فعندئذ يمكن كتابة المعادلتين (٢.٦٨) بالشكل :

$$\begin{aligned} 1 + B_1 &= A_2 \\ k(1 - B_1) &= k'A_2 \end{aligned} \quad (2.68)'$$

وهما تحويان مجهولين فقط هو A_2 , B_1 . يسهل تعيينها فنجد :

$$B_1 = \frac{k - k'}{k + k'} , \quad A_2 = \frac{2k}{k + k'} \quad (2.69)$$

أي أن سعة الموجة المنعكسة $B_1 \neq 0$ مما يدل على وجودها رغم أن طاقة الحسم أكبر من ارتفاع حاجز الكمون ولا تنعدم B_1 إلا في الحالة التي يكون فيها $k = k'$ ويتحقق ذلك (لاحظ (2.65)) عندما $V_0 = 0$ وهذا يعني ، فيزيائياً ، عدم وجود أي حاجز للكمون ، وهذه نتيجة منطقية لأننا سنحصل على موجة مستوية e^{ikx} تتحرك في الاتجاه $0x$ وليس هناك ما يجعلها (أو يجعل قسماً منها) يترد بعكس الاتجاه $0x$.

نسمة كثافة تيار الجسيمات المنعكسة J_R على الحاجز ، إلى كثافة تيار الجسيمات الواردة J_0 عامل الانعكاس R . أما نسبة تيار الجسيمات النافذة ضمن الحاجز J_D إلى تيار الجسيمات الواردة فيسمى عامل النفوذ D ولحساب كل من J_R ، J_D يمكن أن نجد انطلاقاً من التعريف (2.12) أن :

$$J_R = \frac{\hbar k}{m} |B_1|^2 , \quad J_D = \frac{\hbar k}{m} |A_2|^2 \quad (2.70)$$

وبما أن J_0 (كثافة تيار الجسيمات الواردة) تساوي $\hbar k/m$ لأن $A_1 = 1$ فنجد بعد تبديل (2.69) في (2.70) أن :

$$R = \frac{J_R}{J_0} = \left| \frac{k - k'}{k + k'} \right|^2 \quad (2.71)$$

$$D = \frac{J_D}{J_0} = 4k \left| \frac{k'}{k + k'} \right|^2 \quad (2.72)$$

وهكذا نجد في هذه الحالة (عندما $E > V_0$ وبالتالي $k' > 0$) أن :

$$R + D = \frac{k^2 + k'^2 - 2kk'}{k^2 + k'^2 + 2kk'} + \frac{4kk'}{k^2 + k'^2 + 2kk'} = 1 \quad (2.73)$$

أي يساوي الواحد كما يجب أن يكون وهذا يعبر عن قانون حفظ عدد

الجسيمات .

ب - إذا كانت طاقة الجسيم الوارد أصغر من ارتفاع حاجز الكمون $E < V_0$ نجد أن k' تصبح عقدية (تخيلية) ويمكن كتابتها بالشكل $k = i\alpha$ حيث α عدد حقيقي يعطى بالعلاقة :

$$\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \quad (2.74)$$

ويصبح عامل الانعكاس R في هذه الحالة :

$$R = \left| \frac{k - i\alpha}{k + i\alpha} \right|^2 = \frac{(k - i\alpha)(k + i\alpha)}{(k + i\alpha)(k - i\alpha)} = 1 \quad (2.75)$$

أما عامل النفوذ D فينعدم لأن :

$$D = 1 - R = 0 \quad (2.76)$$

والموجة المنعكسة يمكن أن تكتب على الشكل :

$$\psi_k'(x) = B_1 e^{-ikx} = \frac{k - i\alpha}{k + i\alpha} e^{-ikx} = e^{-i(kx + \gamma)} \quad (2.77)$$

مع العلم γ فرق الطور الحادث نتيجة للانعكاس ، ويمكن حسابه بسهولة من (2.77) حيث نجد :

$$\gamma = \arctan \frac{2k\alpha}{k^2 + \alpha^2} \quad (2.78)$$

وأخيراً يجب التأكيد على خاصية هامة من خواص الجسيمات المجهرية. وهي أنه بالرغم من أن عامل الانعكاس يساوي الواحد فالتابع الموجي لاينعدم في المنطقة II وهو يساوي :

$$\psi_D(x) = A_2 e^{ik'x} = \frac{2k}{k + i\alpha} e^{-\alpha x} \quad (x > 0) \quad (2.79)$$

واحتمال وجود الجسيم هناك ليس معدوماً لأن :

$$|\psi_0(x)|^2 = \frac{4k^2}{k^2 + \alpha^2} e^{-2\alpha x} \neq 0$$

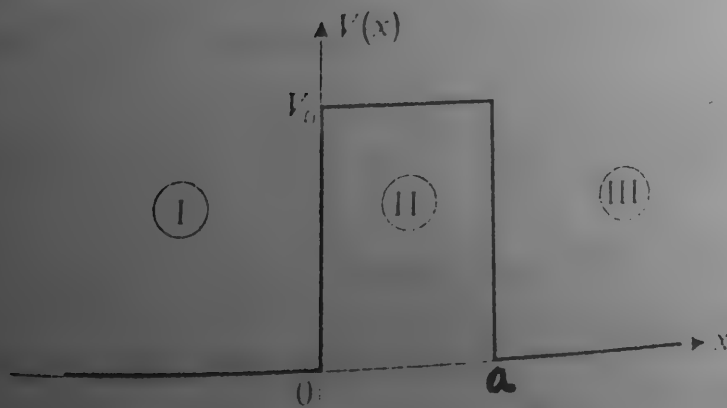
(2.80)

وهذا يؤكد اختلاف السلوك الفيزيائي للجسيمات المجهرية عن الجسيمات الكلاسيكية ، إذ من المعلوم أن الجسيمات المتحركة حسب قوانين الميكانيك الكلاسيكي لا يمكن أن تصل إلى المنطقة II ($x > 0$) إلا إذا كانت طاقتها أكبر من ارتفاع حاجز الكمون $E > V_0$ ولكنها يمكن أن توجد هناك (!) حسب قوانين ميكانيك الكم طبقاً

لـ (2.80) وهذا يسمى ظاهرة النفق (Tunnel - effect) . ويمكن البرهان أن المسافة التي يقطعها الجسيم في المجال II ($x > 0$) تتناسب مع $\frac{1}{\alpha}$ وذلك انطلاقاً من علاقات الشك ، ثم حساب المسافة التي يقطعها الكترون إذا كان الفرق $V_0 - E$ بالنسبة له يساوي 1 eV فنجد بسهولة :

$$\delta x \approx \frac{h}{\Delta p} = \frac{h}{\sqrt{2m(V_0 - E)}} = \frac{10^{-27}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19}}} \approx 10^{-8} \text{ cm.}$$

من المفيد في نهاية هذه الفقرة دراسة سلوك جسيم عندما يتعرض لحاجز كمون ذي عرض محدود كما في الشكل (2.11) : وسيكون عندنا ثلاث مناطق .



ويسهل دراسة هذه الحالة كتعميم للحالة السابقة إذ نجد التوابع الموجية التالية الموافقة للمناطق الثلاث :

شكل (2.11)

$$\left. \begin{aligned} \text{I) } \psi_1 &= e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \\ \text{II) } \psi_2 &= A_2 e^{ik'x} + B_2 e^{-ik'x} \\ \text{III) } \psi_3 &= A_3 e^{ikx} \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

وهنا نلاحظ أن $B_2 \neq 0$ بسبب امكانية الانعكاس على القسم الداخلي من الحاجز أما الثوابت الأربع A_2, A_3, B_1, B_2 فتعين من شروط الحدية التي تكتب بالشكل :

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(-0) &= \psi_2(+0) , \quad \psi_1'(-0) = \psi_2'(+0) \\ \psi_2(a-0) &= \psi_3(a+0) , \quad \psi_2'(a-0) = \psi_3'(a+0) \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

وهي أربع معادلات كافية لتعيين أربعة مجاهيل ثم حساب عوامل النفوذ والانعكاس .



مسائل الفصل الثاني

١ - يتحرك الكترون في حفرة كمون لانهائية العمق ذات بعد واحد، عرضها l .

احسب احتمال وجود هذا الالكترون في الثلث الثاني من الحفرة علماً أنه موصوف بالتابع الموجي :

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x$$

٢ - يسقط تيار من الالكترونات وحيدة الطاقة على حاجز كمون . احسب ارتفاع هذا الحاجز اذا علمت أن 4% من الالكترونات الواردة على الحاجز ، ينعكس عنه .

٣ - أوجد القسم الزمني من حل معادلة شرودنغر غير المستقرة مع العلم أن لهذه المعادلة الشكل التالي :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E \psi$$

٤ - يوضع التابع الموجي الذي يصف جسيماً في حفرة كمون لانهائية العمق بالشكل :

$$\psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} \quad \left(k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \right)$$

أ - احسب انطلاقاً من شرط التنظيم وشروط محدودية التابع

الموجي كلا من c_1 و c_2 .

ب - احسب الطاقة E_n ثم أوجد التوابع الموجية الخاصة بالمنظمة .

٥ - يتحرك الكترون في حفرة كمون لانهائية عرضها l .

أوجد النقط التي يتساوى فيها احتمال وجود الالكترون على

السوية الأولى والثانية .

احسب هذا الاحتمال ووضح ذلك بيانياً .

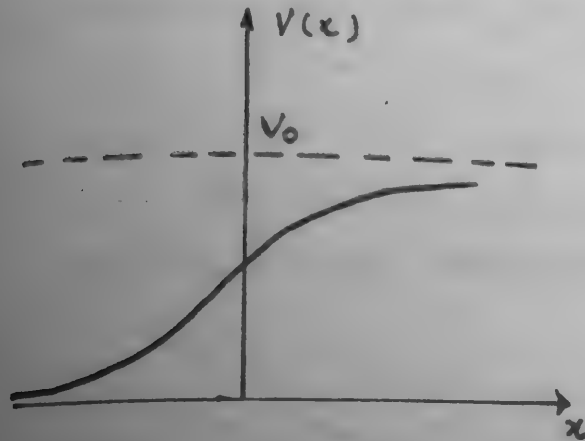
٦ - ليكن الهزاز التوافقي المشحون والموضوع في حقل كهربائي E

ثابت .

أوجد التوابع الموجية وسويات الطاقة له استناداً إلى معرفتك
 بالهزاز التوافقي الذي درسته في هذا الفصل .
 7 - برهن أن التوابع الموجية لجسيم في حفرة كمون تحقق العلاقة :

$$\langle \psi_n | \psi_{n'} \rangle = \langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$$

8 - أعد السؤال نفسه للتوابع الخاصة للهزاز التوافقي .
 9 - احسب كثافة التيار الاحتمالي J عندما $x = \pm \infty$ وذلك
 عند ورود الجسيمات على الحاجز التالي ، شكل (2.12) :



$$V=0 \quad \text{if} \quad x = -\infty$$

$$0 < V < V_0 \quad \text{if} \quad x \neq \pm \infty$$

$$V=V_0 \quad \text{if} \quad x = +\infty$$

ثم برهن أن التيار
 الاحتمالية $J(\pm \infty)$
 والكثافة الاحتمالية
 $\rho(\pm \infty)$ يحققان
 العلاقة :

شكل (2.12)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } J = 0$$

10 - احسب التوابع الموجية الموافقة للحالات الثلاث ($n=0, 1, 2, 3$)
 مستفيداً من العلاقة العامة (التوابع الخاصة للهزاز التوافقي)

$$\psi_n = (-1)^n A_n e^{\frac{1}{2} \eta^2} \frac{d^n e^{-\eta^2}}{d\eta^n}$$

ثم ارسم هذه التوابع واستنتج الكثافة الاحتمالية لوجود
 الهزاز في نقطة ما من الفراغ في الحالات الثلاث السابقة ، ثم
 عمم ذلك عندما $n \rightarrow \infty$.

- 11 - يتحرك جسيم في حفرة كمون ذات بعدين L, W .
 آ - أوجد التابع الموجي المنظم الذي يصف هذا الجسيم عندما
 $n_x = 1, n_y = 2$.

ب - برهن أن طاقته الكلية يمكن أن تكتب بالشكل :

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m} \left[\frac{a^2}{L^2} + \frac{b^2}{W^2} \right]$$

- حيث a, b أعداد صحيحة زوجية وموجبة .
 12 - تعرف القيمة الوسطى لمؤثر \hat{A} بالعلاقة (انظر الفصل

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi dV$$

(الثالث) :

يطلب حساب القيمة الوسطى لـ x وذلك لجسيم يتحرك في حفرة
 كمون عرضها a .

- 13 - ليكن التابع الموجي الذي يصف جسيم :

$$\psi(r) = C e^{-\frac{r}{a}}$$

- آ - احسب C ثابت التنظيم .
 ب - احسب المسافة r التي من أجلها يكون احتمال وجود هذا
 الجسيم أكبر ما يمكن .

- 14 - تسقط حزمة من الجسيمات طاقتها E على حاجز كمون من الشكل :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ V_0 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

احسب معامل الانعكاس R . وإذا علمت أن $E = 100 \text{ eV}$

فاحسب ارتفاع حاجز الكمون .

- 15 - هزاز توافقي ذو بعد واحد طاقته
 احسب متوسط طاقته الكامنة V ومتوسط طاقته الحركية T

مع العلم أن :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^{2n} e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}$$

- 16 - يتحرك هزاز توافقي ذي بعدين في الكمون التالي :

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_2^2 y^2$$

احصا مستويات الطاقة والتوابع الموجية التي تصف هذا الهزاز بالاستفادة من دراستك للهزاز التوافقي ذي البعد الواحد، ادرس الحالة الخاصة عندما $\omega_1 = \omega_2$. هل تكون مستويات الطاقة منطبقة عندئذ؟ اذا كان ذلك فاحسب رتبة انطباقها.

17- ليكن n, n' متجهان خاصان للمؤثر \hat{H} في حالة الهزاز التوافقي حيث:

$$|n\rangle = \psi_n = c_n e^{-\frac{1}{2}\eta^2} H_n(\eta)$$

$$H_n(\eta) = (-1)^n e^{\eta^2} \frac{d^n e^{-\eta^2}}{d\eta^n}, \quad \eta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x.$$

أ- احسب ثابت التنظيم c_n .

ب- برهن بالاستناد الى عبارة كل من $|n\rangle$ و $|n'\rangle$ أن:

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$$

ج- هل يمكن نشر أي تابع $f(x)$ بواسطة المتجهات $|n\rangle$ ؟ ولماذا؟ واذا كان مثل هذا النشر ممكناً فانشر التابع $\delta(x)$.

18- احسب عامل النفوذ ضمن كامل الحاجز التالي:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq b/2 \\ V_0 & \text{if } b/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & \text{if } x \geq a/2 \end{cases}$$

19- ماذا يحدث في الحالة الخاصة عندما يكون V_0 كبيراً جداً. أوجد مستويات الطاقة والتوابع الخاصة لجسيم يتحرك في حفرة كمون من الشكل:

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } a < x \leq 0, \quad b < y \leq 0 \\ \infty & \text{if } x > a, \quad b < y \leq 0 \end{cases}$$

ادرس الحالة الخاصة عندما $a = b$ (حفرة كمون مربعة ذات بعدين متساويين) .

ادرس سويات الطاقة وبرهن أنها منطبقة ، ثم احسب رتبة الانطباق .

20 - احسب متوسط كمية حركة جسيم يتحرك في الكمون $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$.

21 - برهن أن متوسط كمية حركة جسيم يتحرك في حفرة كمون لانهائية العمق وذات بعد واحد يساوي الصفر .

22 - اوجد التوابع الموجية الخاصة لمؤثر كمية حركة جسيم يتحرك في حفرة كمون ذات بعد واحد . هل يمكن أن يكون التابع الموجي المقابل لمؤثر الطاقة تابعاً خاصاً لكمية الحركة أيضاً؟

23 - في اللحظة $t = 0$ يوصف جسيم بالتابع التالي :

$$\psi(x,0) = A e^{-\frac{x^2}{2a^2} + i k_0 x}$$

آ - احسب A وكثافة الاحتمال m ثم عين المجال حيث يتحرك الجسيم واحسب كثافة التيار الاحتمالي J .

ب - احسب عوامل نشر فورية للتابع $\psi(x,0)$ ، باستخدام العلاقة :

$$\psi(x,0) = \int C(k) e^{i k x} dk$$

ثم برهن أن $|\psi(x,0)|^2 = |C(k)|^2$ (علاقة بارسيفال) .

ج - احسب $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ و $\langle (\Delta p_x)^2 \rangle$ وتأكد من صحة علاقات الشك .

24 - يخضع جسيم للكمون التالي (حفرة كمون غير متناظرة) :

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & \text{if } x < 0 & \text{(المنطقة I)} \\ 0 & \text{if } 0 < x < a & \text{(المنطقة II)} \\ V_2 & \text{if } x > a & \text{(المنطقة III)} \end{cases}$$

احسب القيم الخاصة والتوابع الخاصة لمؤثر هاميلتون لهذا الجسم اذا علمت أن طاقته تحقق العلاقة $0 < E < V_1 < V_2$.
 ٢٥ - يمتاز جسم طاقته E حاجز كمون من الشكل :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ V_0 & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{if } x > a \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{I المنطقة} \\ \text{II المنطقة} \\ \text{III المنطقة} \end{matrix}$$

فاذا علمت أن عامل النفوذ هو نسبة كثافة تيار الجسيمات النافذة \bar{D} على كثافة تيار الجسيمات الواردة \bar{D}_0 أي $D = \bar{D}_D / \bar{D}_0$ وبالطريقة نفسها تعرف عامل الانعكاس $R = \bar{D}_R / \bar{D}_0$.

آ - برهن أن الحل العام لمعادلة شرودنغر في المناطق الثلاث المذكورة آنفاً يكتب بالشكل :

$$\psi_I = A e^{ik'x} + B e^{-ik'x}, \quad \psi_{II} = C e^{ikx} + D e^{-ikx},$$

$$\psi_{III} = E e^{ikx} + F e^{-ikx}, \quad k = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2}, \quad k' = \sqrt{2mE/\hbar^2}.$$

ب - احسب عوامل النفوذ والانعكاس وذلك بعد حساب الثوابت A, B, C, D, E, F باستخدام شروط استمرار التابع ψ ومشتقاته على الحدود وما تراه مناسباً من شروط أخرى ، مميزات الحالتين $E < 0$ ، $E > 0$.

ج - ادرس الحالة الخاصة عندما ينتهي عرض الحاجز (أي a) إلى اللانهاية.

د - ادرس بصورة خاصة الحالات الأربع التالية :

- $E \rightarrow \infty$ (أو عملياً ، $E \gg V_0$)
 - حاجز قليل الشفافية أي يحقق العلاقة : $\frac{(V_0 - E)ma^2}{\hbar^2} \gg 1$
 - $E \rightarrow 0$ (أو عملياً ، $E \ll \frac{ma^2 V_0}{\hbar^2}$)
 - $E \ll V_0$.

$$\frac{1}{\hbar^2} ma^2 V_0 \ll 1, \quad \frac{1}{\hbar^2} ma^2 E \ll 1$$

٢٦ - احسب عاملي النفوذ و الانعكاس لجسيمات تتحرك في كمون من الشكل : $V(x) = \alpha \delta(x)$.

٢٧ - اوجد حل معادلة شرودنغر لجسيم خاضع للكمون التالي :

$$V(x) = V_0 \left[e^{-2\alpha x} + 2 e^{-\alpha x} \right]$$

٢٨ - عين السويات الطافوية والتوابع الخاصة المنظمة لجسيم يقع في حفرة كمون من الشكل :

$$V(x) = -\alpha \delta(x)$$

ثم احسب متوسط الطاقتين الحركية والكامنة .



الفصل الثالث

الأسس الرياضية - الفرضيات الأساسية

لقد درسنا في الفصل الأول الأسس الفيزيائية لميكانيك الكم وحصلنا في الفصل الثاني على معادلة شرودنجر التي يوئدي حلها الى حساب التابع الموجي $\psi(\vec{r}, t)$ هذا التابع الذي اذا ضربناه بمرافقه $\psi^*(\vec{r}, t)$ نحصل على الكثافة الاحتمالية لوجود الجسيم في اللحظة t ، في النقطة المعينة بمتجه الموضع \vec{r} ، وأن الشروط الحدية الموضوعة على هذا التابع الموجي ومشتقاته تؤءدي الى حساب ثابت النظم وطاقة الجسيم .

وبالرغم من أن الاداة الرياضية المستخدمة في الفلمين السابقين كانت كافية لتفسير بعض الظواهر في العالم المجهرى ؛ كحساب طاقة الجسيم في حفرة كمون وطاقة هزاز توافقي وحساب التوابع الموجية المقابلة لذلك ، الا أن هذه الاداة ليست كافية لحساب القيم الوسطى للموءثرات ، تلك القيم التي ترتبط مباشرة ، كما

سرى ، بنتائج القياسات المخبرية ، وهي ليست كافية أيضاً لتفسير اشعاع المجموعات المجهرية وتفسير وجود العزم الذاتي (السبين) عند بعض الجسيمات وما ينتج عنه . ولهذا كان لا بد من تطوير الاداة الرياضية لميكانيك الكم بحيث يبنى هذا العلم على أساس وفرضيات متينة ، وهذا ما سندرسه في هذا الفصل .

16 - تعاريف - I :

أ - يعرف المؤثر بأنه مجموعة القواعد الناظمة لتحويل تابع ما $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ الى تابع آخر $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ لنفس المتحولات .

لنأخذ على سبيل المثال المؤثر :

$$\hat{A} = \hat{a} + b \frac{d}{dx} \quad (3.1)$$

فهو يحول التابع $f(x)$ الى تابع آخر $\psi(x)$ طبقاً للعلاقة :

$$\hat{A}f(x) = (\hat{a} + b \frac{d}{dx}) f(x) = a f(x) + b \frac{df}{dx} = \psi(x) \quad (3.2)$$

أما المؤثر $\hat{B} = (x \frac{\partial}{\partial x})^2$ فهو يحول التابع $f(x)$ الى تابع آخر $g(x)$ طبقاً لما يلي :

$$\begin{aligned} (x \frac{\partial}{\partial x})^2 f(x) &= x \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} f(x) = \\ &= x (\frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}) = x \frac{\partial f}{\partial x} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g(x) \quad (3.3) \end{aligned}$$

أي أن المؤثر \hat{B} يمكن أن يوضع بالشكل :

$$\hat{B} = x \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

أما مؤثر هاملتون الذي استخدم في الفصل السابق فهو :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \hat{V}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \hat{V}(x) \quad (3.4)$$

وهو يحول التابع ψ الى تابع آخر حسب القاعدة :

$$\hat{A} \psi = E \psi$$

وهي كما رأينا ، معادلة تفاضلية (معادلة شرودنجر) كافية لحساب ψ وايجاد قيم الطاقة E .

ب - يكون المؤثر \hat{A} خطياً اذا حقق العلاقة :

$$\hat{A}(\alpha f + \beta g) = \alpha \hat{A}f + \beta \hat{A}g \quad ; \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}) \quad (3.5)$$

مثال على ذلك : مؤثرات الجداء التي ينحصر تأثيرها على التابع

$$\psi \text{ بضربها فيه ، والمؤثرات التفاضلية } \frac{d^n}{dx^n} : (\forall n \in \mathbb{Z})$$

ج - يعرف مجموع مؤثرين \hat{A} و \hat{B} بأنه المؤثر \hat{C}

الذي يكافئ تأثيره على التابع ψ ، تأثير المؤثرين \hat{A} و \hat{B}

أي :

$$(\hat{A} + \hat{B}) \psi = \hat{C} \psi \Rightarrow \hat{C} = \hat{A} + \hat{B} \quad (3.6)$$

لنأخذ ، على سبيل المثال ، المؤثر $\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r$ ولنحسب تأثيره

على التابع $\psi(r, \theta, \varphi)$ فنجد :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \right) \psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\psi + r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) = \left(\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \psi \quad (3.7) \end{aligned}$$

فالمؤثر في الطرف الأيسر هو مجموع المؤثرين ضمن القوس في

الطرف الأيمن أي أن :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

هو المؤثر \hat{C} الذي يكافئ

أي أن :

$$\hat{C} \psi = \hat{A} \hat{B} \psi$$

$\hat{A} \hat{B}$ و $\hat{B} \hat{A}$ أي أن :

د - جداء مؤثرين \hat{A} و \hat{B}

تأثيره تأثير المؤثرين \hat{A} و \hat{B}

$$(3.8)$$

وليس من الضروري أن يتساوى المقداران

ميكانيك الكم ٢-٦

(3.9) $\hat{A} \hat{B} \psi \neq \hat{B} \hat{A} \psi$
 هـ - ان مبدل المؤثرين \hat{A} و \hat{B} هو مؤثر جديد يرمز له
 بالرمز $[\hat{A}, \hat{B}]$ ويعرف بالعلاقة :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} \quad (3.10)$$

ويقال عن المؤثرين \hat{A} و \hat{B} انهما تبادليان عندما ينعدم مبدلها ، وعندئذ :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} = 0 \Leftrightarrow \hat{A} \hat{B} = \hat{B} \hat{A}$$

اما اذا كان لدينا مبدل من النوع $[\hat{A}, \hat{B} \hat{C}] = - [\hat{B} \hat{C}, \hat{A}]$ فمن السهل برهان صحة العلاقة :

$$[\hat{A}, \hat{B} \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] \hat{C} + \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}] = - [\hat{B}, \hat{A}] \hat{C} - \hat{B} [\hat{C}, \hat{A}] \quad (3.11)$$

و - يعرف مؤثر الوحدة \hat{I} بالعلاقة :

$$\hat{I} \psi = \psi \quad (3.12)$$

اما المؤثر المعاكس لمؤثر ما \hat{M} فيعرف بالعلاقة :

$$\hat{M} \hat{M}^{-1} \psi = \hat{M}^{-1} \hat{M} \psi = \psi \quad (3.13)$$

ومن الواضح انه اذا كان $\hat{C} = \hat{A} \hat{B}$ فان :

$$C^{-1} = [\hat{A} \hat{B}]^{-1} = \hat{B}^{-1} \hat{A}^{-1}$$

وكذلك :

$$(\hat{A} \hat{B} \hat{C} \dots)^{-1} = (\dots \hat{C}^{-1} \hat{B}^{-1} \hat{A}^{-1})$$

17 - تعاريف - II :

آ - لتكن ψ مجموعة توابع الاحداثيات (x, y, z) المستمرة والقابلة للاشتقاق في جميع نقط الفراغ والمعيينة في المجال

$$(x, y, z) \in (-\infty, +\infty)$$

وعندئذ يتعين أي مؤثر خطي بمعرفة طريقة تأثيره على مجموعة التتابع $\psi(x, y, z)$ ؛ فالمؤثرات $\hat{p}, \hat{d}, \hat{q}$ تتعين على الترتيب ، بالعلاقات التالية :

$$\begin{aligned}\hat{q} \psi(x, y, z) &= x \psi(x, y, z) , \quad \hat{d} \psi(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y, z) \\ \hat{p} \psi(x, y, z) &= \psi(-x, -y, -z) .\end{aligned}\quad (3.14)$$

وقد يتعين المؤثر أحياناً بشكل تكاملي كما يتضح من العلاقة :

$$\hat{A} \psi(x) = \int A(x, y) \psi(y) dy \quad (3.15)$$

يسمى المقدار $A(x, y)$ نواة المؤثر \hat{A} . ان نواة مؤثر الواحدة هو تابع ديراك ، وعلى هذا الأساس نعرف هذا التابع الذي نرمز له بالرمز δ بالشكل :

$$\hat{I} \psi(x) = \int \delta(x-y) \psi(y) dy \quad (3.16)$$

ويمكن بواسطة التابع δ وضع كثير من المؤثرات بشكل تكاملي ، فمثلاً نضع المؤثر \hat{q} الوارد في (3.14) كما يلي :

$$\hat{q} \psi = \int Q(x, y) \psi(y) dy = \int y \delta(x-y) \psi(y) dy \quad (3.17)$$

وفي الحالة الخاصة عندما يأخذ المتحول x قيماً متقطعة نرمز لها بالرمز x_n وللتابع المقابل بـ $\psi(x_n)$ بحيث يكون :

$$\psi(x_n) \equiv \psi_n \equiv \psi(n) \quad (3.18)$$

في هذه الحالة يتحول التكامل (3.15) الى مجموع من الشكل :

$$\sum_n A_{mn} \psi_n = \psi_m \quad (3.19)$$

حيث A_{mn} هي مصفوفة تمثل دور النواة في (3.15) . ويبدو أن

(3.19) شبه جداء المصفوفات حيث نعتبر أن كلاً من التابعين ψ_n و ψ_m هو مصفوفة ذات عمود واحد وأن كل عنصر من عناصرهما هو مركبة متجه في فراغ اقليدي E_n ، مع العلم أن التابع ψ_n يحول إلى ψ_m بواسطة المصفوفة، المؤثر، A_{mn} ، ومن الواضح أن عناصر مصفوفة الوحدة هي رمز كرونكر δ_{mn} ، أما عناصر مصفوفة المؤثر \hat{C} الذي هو عبارة عن جداء المؤثرين \hat{A} و \hat{B} فهي:

$$C_{nn} = \sum_k A_{nk} B_{kn} \quad (3.20)$$

ب- يعرف الجداء السلمي للتابعين $f(x)$ و $g(x)$ بالعلاقة:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) g(x) dx \quad (3.21)$$

(حيث ترمز x لكافة المتحولات). ويقال عن التابعين f و g انهما متعامدان عندما ينعدم جداؤهما العددي، ومن الواضح أن الجداء العددي قد يتباعد ولكننا سنقتصر على ما يسمى مجموعة التوابيع التربيعية المكاملة والتي نرمز لها بالرمز $L^2(+\infty, -\infty)$ ، والتي يتقارب من أجلها التكامل (3.21) أي أن:

$$\int f^* g dx < \infty \quad (3.22)$$

أن خواص الجداء العددي تنتج مباشرة من (3.21)؛ فمن السهل التحقق من صحة العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} (f + f', g) &= (f, g) + (f', g) \\ (f, g + g') &= (f, g) + (f, g') \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} (f, \alpha g) &= \alpha (f, g) \\ (\alpha f, g) &= \alpha^* (f, g) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbb{C} \end{array} \right.$$

ج- يعرف تنظيم التابع f (ويرمز له بالرمز $\|f\|$) بالعلاقة:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f^* f dx \right]^{1/2} \quad (3.24)$$

نعرف الآن فراغ هيلبرت فنقول انه فراغ مجموعة النوايع $L^2(-\infty, +\infty)$ التي عرف عليها الجداء العددي (3.24) والنظم (3.24)، ونقول عن هذه النوايع أنها متجهات في فراغ هيلبرت.

د - يعرف الجداء العددي (الداخلي) للتابعين ψ و φ دوى المنحولات المتقطعة بالعلاقة :

$$(\psi, \varphi) = \sum_n \psi_n^* \varphi_n \equiv \langle \psi | \varphi \rangle \quad (3.25a)$$

وهو عبارة عن جداء متجه سطر $\langle \psi |$ مركباته $(\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_n^*)$ متجه عمود $| \varphi \rangle$ مركباته $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ ، ومن الواضح أن عدد مركبات متجه السطر يجب أن يساوي عدد مركبات متجه العمود ويكون لدينا :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = (\psi_1^* \psi_2^* \dots \psi_n^*) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \psi_1^* \varphi_1 + \psi_2^* \varphi_2 + \dots + \psi_n^* \varphi_n \quad (3.25b)$$

ه - يعرف عنصر مصفوفة المؤثر \hat{A} بالعلاقة :

$$A_{nn} \equiv \langle \varphi_n | \hat{A} | \varphi_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^* \hat{A} \varphi_n dx \quad (3.26)$$

18 - المؤثرات الهرميتية :

أ - يعرف المؤثر المرافق ذاتياً \hat{L}^+ لمؤثر \hat{L} بالعلاقة :

$$\langle \psi | \hat{L} | \varphi \rangle = (\langle \varphi | \hat{L}^+ | \psi \rangle)^* \quad (3.27a)$$

التي توضع أيضاً بالشكل :

$$\int \varphi^* \hat{L} \varphi dx = \int \varphi (\hat{L}^+ \psi)^* dx \quad (3.27b)$$

لنبرهن أن $(\hat{L}^+)^+ = \hat{L}$ ولهذا نبدأ من التعريف (3.27a) ونأخذ المرافق الزائدي من الطرف الأيمن حيث نجد :

$$\langle \psi | \hat{L} | \varphi \rangle = (\langle \varphi | \hat{L}^+ | \psi \rangle)^* = (\langle \psi | (\hat{L}^+)^+ | \varphi \rangle)^{**} = \langle \psi | \hat{L}^+ | \varphi \rangle$$

$$\hat{L}^{++} = \hat{L}$$

ومن ثمه :
(3.28)

ومن السهل حساب $(\alpha \hat{L})^+$ كما يلي :

$$\langle \psi | \alpha \hat{L} | \psi \rangle = (\alpha \langle \psi | \hat{L}^+ | \psi \rangle)^* = \alpha^* (\langle \psi | \hat{L}^+ | \psi \rangle)^*$$

ومن ثمه :

$$(\alpha \hat{L})^+ = \alpha^* \hat{L}^+ \quad ; \quad (\forall \alpha \in \mathbb{C}) \quad (3.29)$$

لنحسب مرافق المؤثر \hat{C} الذي يساوي جداء مؤثرين \hat{A} و \hat{B} فنجد طبقاً للتعريف (3.27) :

$$\langle \psi | \hat{A} \hat{B} | \psi \rangle = (\langle \psi | (\hat{A} \hat{B})^+ | \psi \rangle)^*$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$\langle \psi | \hat{A} \hat{B} | \psi \rangle = (\langle \hat{B} \psi | \hat{A}^+ | \psi \rangle)^* = \langle \hat{A}^+ \psi | \hat{B} | \psi \rangle = (\langle \psi | \hat{B}^+ \hat{A}^+ | \psi \rangle)^*$$

ومنه بالمقارنة بين العلاقتين السابقتين نجد :
 $(\hat{A} \hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+$
ويمكن تعميم ذلك على عدة مؤثرات حيث نجد :

$$(\hat{A} \hat{B} \hat{C} \dots)^+ = (\dots \hat{C}^+ \hat{B}^+ \hat{A}^+) \quad (3.30)$$

ب - يعرف المؤثر الهرميتي بأنه المؤثر الذي يتطابق مع مرافقه الذاتي وهو حالة خاصة من المرافق الذاتي المعروف بالعلاقة (3.27) أي أن :

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = (\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle)^* \quad (3.31)$$

لنأخذ، مثلاً، المؤثر \hat{x} ولنختبر هرميتية هذا المؤثر ولهاذا نفرض ψ و ϕ تابعين للاحداثيات فقط وعندئذ نجد طبقاً لـ (3.27) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{x} \phi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi (\hat{x} \psi)^* dx \Rightarrow \langle \psi | \hat{x} | \phi \rangle = (\langle \psi | \hat{x} | \phi \rangle)^*$$

فالمؤثر \hat{x} هو مؤثر هرميتي . أما المؤثر d/dx فهو غير هرميتي

لان :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{d}{dx} \psi dx = \psi^* \psi \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \frac{d\psi^*}{dx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \left(-\frac{d}{dx} \psi \right)^* dx$$

اي ان :

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^+ = -\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \quad (3.32)$$

ولاختبار هرميتية المؤثر $\frac{d^n}{dx^n}$ نفرض أولاً أن التوابع ψ و ψ^* التي هي متجهات في فراغ هيلبرت المعروف سابقاً، مستمرة وقابلة للاشتقاق بقدر ما نريد من المرات وتحقق العلاقة $\psi^{(n)}(0) = \psi^{(n)}(\infty) = 0, (n \in \mathbb{Z})$ وعندئذ يكون :

$$\int \psi^* \frac{d^n}{dx^n} \psi dx = (-1)^n \int \psi \frac{d^n \psi^*}{dx^n} dx = \int \psi [(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \psi]^* dx$$

ومنه نجد :

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} \right)^+ = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \quad (3.33)$$

وبالتالي لا يكون المؤثر (d^n/dx^n) هرميتياً إلا عندما يكون n زوجياً. لنبحث أخيراً عن شرط هرميتية المؤثر الممثل بمصفوفة ولهذا نجد طبقاً لـ (3.27) بعد وضع الطرفين بشكل مصفوفات :

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_{m,n} \psi_m^* A_{mn} \psi_n, \quad (\langle \psi | \hat{A}^+ | \psi \rangle)^* = \sum_{m,n} \psi_m A_{mn}^+ \psi_n^*$$

وبتغيير مكان الدليلين في المجموع الأخير يكون :

$$\sum_{m,n} \psi_m A_{mn}^+ \psi_n^* = \sum_{m,n} \psi_m^* (A_{nm}^+)^* \psi_n$$

اي ان :

$$\sum_{m,n} \psi_m^* A_{mn} \psi_n = \sum_{m,n} \psi_m^* (A_{nm}^+)^* \psi_n \quad (3.34)$$

$$A_{mn} = (A_{nm}^+)^* \Rightarrow A_{nm}^+ = A_{mn}^* \quad \text{ومن هنا نستنتج :} \quad (3.35)$$

• - ليكن المؤثر \hat{A} الذي يؤثر على التابع ψ ($\|\psi\| \neq 0$)

حيث تحقق المعادلة :

$$\hat{A}\psi = \lambda\psi$$

(3.36a)

نسمي λ القيمة الخاصة للمؤثر \hat{A} عند تأثيره على التابع ψ الذي يسمى التابع الخاص للمؤثر \hat{A} . وإذا وجد للمؤثر \hat{A} عند تأثيره على التابع ψ قيمة خاصة واحدة λ_n يقابلها تابع خاص نرمز له ψ_n فإننا نضع المعادلة السابقة بالشكل:

$$\hat{A}\psi_n = \lambda_n\psi_n \quad (3.36b)$$

تتألف مجموعة القيمة الخاصة λ_n طيف المؤثر \hat{A} ويقال عن الطيف في هذه الحالة أنه غير منطبق (Nondegenerate). أما إذا قابلت القيمة الخاصة λ_n عدداً من التوابع $(i = 1, 2, \dots, s)$: ψ_{ni} فإن طيف المؤثر \hat{A} يكون منطبقاً (Degenerate) (أو متوالداً). نسمي s عندئذ رتبة الانطباق، وتوضع المعادلة (3.36b) عندئذ بالشكل :

$$\hat{A}\psi_{ni} = \lambda_n\psi_{ni} \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (3.36c)$$

19 - خواص المؤثرات الهرميتية :

آ - نظراً لأهمية المؤثرات الهرميتية في ميكانيك الكم فإننا سندكر أهم النظريات المتعلقة بها .

1 - إذا كان لمؤثرين هرميتيين نفس التوابع الخاصة فإنهما يتبادلان .

في الحقيقة إذا فرضنا أن ψ_n هو تابع خاص مشترك للمؤثرين \hat{A} و \hat{B} على الترتيب فإننا نجد :

$$\hat{A}\hat{B}\psi_n = \hat{A}b\psi_n = b\hat{A}\psi_n = ba\psi_n = \hat{B}\hat{A}\psi_n$$

اي أن $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ وبالتالي $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.
ونحمل على نتيجة مشابهة اذا أخذنا التابع $f(x)$ المؤلف من تركيب خطي من التوابيع $\psi_n(x)$ حيث نجد :

$$\hat{A}\hat{B}f(x) = \sum_k \hat{A}\hat{B}c_k\psi_k(x) = \sum_k a_k b_k \psi_k(x) = \hat{B}\hat{A}f(x)$$

اي أن :

$$\hat{A}\hat{B}f(x) = \hat{B}\hat{A}f(x) \Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = 0 \quad (3.37)$$

٢ - اذا تبادل مؤثران هرميتيان فانه يمكن وضع عناصرهما المصفوفية في آن واحد بشكل قطري .
في الحقيقة اذا فرضنا أن العناصر المصفوفية للمؤثر \hat{A} قطرية أي أن :

$$A_{mn} = \lambda_m \delta_{mn} \quad (3.38)$$

وكذلك نجد بسبب التبادل : $(AB)_{mn} = (BA)_{mn}$ أو :

$$\sum_k A_{mk} B_{kn} = \sum_k B_{mk} A_{kn} = \sum_k A_{kn} B_{mk}$$

وطبقاً لـ (3.38) يكون :
 $\sum_k \lambda_m \delta_{mk} B_{kn} = \sum_k \lambda_k \delta_{kn} B_{mk}$
ومن الواضح أن كلا المجموعتين في العلاقة السابقة يحوي حداً واحداً هو عندما $k = m$ في الطرف الأول و $k = n$ في الطرف الثاني وعليه يكون : $B_{mn} (\lambda_m - \lambda_n) = 0$
فان $m \neq n$ $B_{mn} = 0$ وبالتالي تنعدم جميع العناصر اللاقطرية أما اذا كان $m = n$ فان : $B_{mn} = B_{mm} = B_{nn} \neq 0$ وهكذا تكون عناصر المصفوفة \hat{B} قطرية أيضاً .

٣ - ان القيم الخاصة للمؤثرات الهرميتية هي قيم حقيقية .
ليكن المؤثر الهرميتي \hat{L} ذي القيمة الخاصة λ والتابع الخاص ψ_n وعليه يكون : $\hat{L}\psi_n = \lambda\psi_n$ ، وبلاستفادة من هرميتية المؤثر نكتب :

$$\langle \psi_n | \hat{L} | \psi_n \rangle = \lambda \langle \psi_n | \psi_n \rangle = (\langle \psi_n | \hat{L} | \psi_n \rangle)^* = \lambda^* \langle \psi_n | \psi_n \rangle$$

ومنه :

$$\lambda = \lambda^*$$

(3.39) يكون التابعان الخاصان المقابلان لقيمتين خاصيتين مختلفتين لمؤثر هرميتي ، متعامدين .

$$\hat{L}\psi_n = \lambda_n \psi_n \text{ و } \hat{L}\psi_m = \lambda_m \psi_m$$

لدينا حسب الفرض : $\langle \psi_m | \hat{L} | \psi_n \rangle = (\langle \psi_n | \hat{L} | \psi_m \rangle)^* = \lambda_m \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \lambda_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle$ وكذلك نجد : $(\lambda_m - \lambda_n) \langle \psi_m | \psi_n \rangle = 0$

(3.40) وبما أن $m \neq n$ ($\lambda_m \neq \lambda_n$) فرضاً فلا بد أن يكون :

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle \equiv \langle m | n \rangle = 0 \quad (3.41)$$

ونقول عندئذ عن التابعين ψ_n و ψ_m أنهما متعامدان .
وإذا فرضنا $m = n$ فإن العلاقة (3.40) تتحقق عندما يساوي الجداء العددي $\langle \psi_n | \psi_n \rangle$ مقداراً محدوداً يمكن أن يختار بحيث يساوي الواحد أي أن :

$$\langle \psi_m | \psi_m \rangle = \langle \psi_n | \psi_n \rangle \equiv \langle n | n \rangle = 1 \quad (3.42)$$

ويمكن توحيد (3.41) و (3.42) بعلاقة واحدة هي :

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{if } m = n \\ 0 & \text{if } m \neq n \end{cases} \quad (3.43)$$

وهي العلاقة التي يجب أن تحققها التوابع الموجية الخاصة التي اعتبرناها متجهات في فراغ هيلبرت ، وهي بهذه الخاصة تشبه متجهات الواحدة في الفراغ الاقليدي التي تحقق العلاقة :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (3.44)$$

ومن المعلوم أنه يمكن نشر أي متجه من الفراغ الاقليدي بواسطة متجهات الواحدة \vec{e}_i ، وتعميما لذلك يمكن نشر أي متجه (تابع ما) في فراغ هليبرت بواسطة المتجهات ψ_n التي تحقق العلاقة (3.43) ، ونقول أن هذه المتجهات تحقق شرط التوامد*.

ب - هل تحقق التوابع ψ_n في (3.36c) شرط التوامد السابق ؟ في الحقيقة ليس من الضروري أن يتحقق الشرط (3.43) عندما يكون الطيف منطبقاً ولكن من الممكن دوماً إيجاد مجموعة توابع ψ متعامدة انطلاقاً من التوابع ψ_n (أو اختصاراً) كما يلي :
نأخذ أولاً ψ_1 و ψ_2 طبقاً للعلاقتين :

$$\psi_2 = \psi_1 + \alpha_{22} \psi_1 \quad (3.45a)$$

حيث α_{22} هو عدد يتم اختياره بحيث يتعامد ψ_1 و ψ_2 أي طبقاً للعلاقة :

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle + \alpha_{22} \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = 0$$

ومنه نحسب α_{22} حيث نجد :

$$\alpha_{22} = \frac{\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle}{\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle}$$

ثم نأخذ ψ_3 طبقاً للعلاقة :

$$\psi_3 = \psi_1 + \alpha_{32} \psi_2 + \alpha_{33} \psi_3 \quad (3.45b)$$

ونختار العددين α_{32} و α_{33} بحيث يتعامد ψ_3 مع كل من ψ_1 و ψ_2 فنحصل على معادلتين نحسب منهما α_{32} و α_{33} وهكذا .

ج - لقد رأينا أن التوابع الخاصة للمؤثرات الهرميتية تؤلف قاعدة تامة يمكن نشر أي تابع بها ، ولكن الأمر يختلف قليلاً عندما يكون طيف المؤثر مستمراً ويكون التابع الخاص له من النوع $\psi(\lambda, x)$.

(*) لقد تم نحت هذه الكلمة من كلمتي توحيد (الجداء العددي يساوي الواحد) وتعامد (الجداء العددي يساوي الصفر) وهي تقابل كلمة (Orthonormalization) بالانكليزية المنحوتة من كلمتين (Normalization و Orthogonal)

الا أنه يمكن اختيار هذه التوابع بحيث تتحقق علاقات مشابهة لما هو الحال في الطيف المتقطع عندما تحقق التوابع ψ_n شرط التواضع ويمكن نشر أي تابع بالشكل :

$$f(x) = \sum_n a_n \psi_n(x) \quad (3.46)$$

حيث حسب عوامل النشر بضرب الطرفين بـ $\psi_n^*(x)$ والاستكمال في كافة نقاط الفراغ وعندئذ نجد :

$$a_n = \int \psi_n^*(x) f(x) dx \quad (3.47)$$

أما إذا كان الطيف مستمراً فإننا نعرف التابع $a(\lambda)$ بالعلاقة :

$$a(\lambda) = \int f(x) \psi^*(\lambda, x) dx \quad (3.48)$$

بفرض $f(x)$ ينتمي الى مجموعة التوابع $L^2(+\infty, -\infty)$ المذكورة سابقاً بحيث يكون :

$$f(x) = \int a(\lambda) \psi(\lambda, x) d\lambda \quad (3.49)$$

مع العلم أن التكامل بـ λ يشمل الطيف المستمر كله، وإذا بدلنا $a(\lambda)$ بقيمتها من (3.48) في (3.49) فإننا نجد :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \psi(\lambda, x) d\lambda \int f(\eta) \psi^*(\lambda, \eta) d\eta = \\ &= \int f(\eta) d\eta \int \psi^*(\lambda, \eta) \psi(\lambda, x) d\lambda \end{aligned}$$

وطبقاً لتعريف تابع ديراك يكون :

$$\int \psi^*(\lambda, \eta) \psi(\lambda, x) d\lambda = \delta(x - \eta) \quad (3.50)$$

وبالطريقة نفسها نجد، إذا بدلنا $f(z)$ بقيمتها في (3.49) في (3.48) أن :

$$a(\lambda) = \iint a(\mu) \psi(\mu, x) \psi^*(\lambda, x) d\mu dx$$

أي أن :

$$\int \psi^*(\lambda, \eta) \psi(\mu, \eta) d\eta = \delta(\mu - \lambda) \quad (3.51)$$

وهكذا تقابل العلاقتان (3.42) و (3.49) العلاقتين (3.46) و (3.47) في الطيف المتقطع . أما العلاقتان (3.50) و (3.51) فيمكن استخدامها لحساب ثابت النظم في الطيف المستمر.

20 - المؤثرات الواحدية ، التحويلات الواحدية :

أ - يعرف المؤثر الواحدى \hat{U} بأنه المؤثر الذى ينطابق مرافقه الذاتى مع المؤثر المعاكس لـ \hat{U} أي أن :

$$\hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^{-1} = \hat{U}^{-1} \hat{U} = \hat{I} \quad (3.52)$$

ولهذا النوع من المؤثرات أهمية خاصة في ميكانيك الكم ولهذا سنورد أهم خواصها فيما يلي:

1 - ان طولية القيمة الخاصة لمؤثر واحدى تساوى الواحد .

$$\hat{U} \psi = \lambda \psi$$

لتكن معادلة القيم الخاصة :

ولنحسب المقدار $\langle \psi | \hat{U} \hat{U}^\dagger | \psi \rangle$ فنجد :

$$\langle \psi | \hat{U} \hat{U}^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{I} | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

ومن جهة ثانية لدينا :

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{U} \hat{U}^\dagger | \psi \rangle &= \lambda \langle \psi | \hat{U}^\dagger | \psi \rangle = \lambda (\langle \psi | \hat{U}^{++} | \psi \rangle)^* = \\ &= \lambda (\langle \psi | \hat{U} | \psi \rangle)^* = \lambda \lambda^* \langle \psi | \psi \rangle = 1 \end{aligned}$$

ومن العلاقات السابقتين نستنتج :

$$|\lambda^2| = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$$

(3.53)

2- جداء مؤثرين واحدتين هو مؤثر واحد واحد ايضا .
ليكن \hat{A} و \hat{B} مؤثرين واحدتين ، ان جداءهما $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ و $\hat{C}^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$ ويكون :

$$\hat{C}^+\hat{C} = \hat{B}^+\hat{A}^+\hat{A}\hat{B} = \hat{B}^+\hat{B} = \hat{I}, \hat{C}\hat{C}^+ = \hat{A}\hat{B}\hat{B}^+\hat{A}^+ = \hat{A}\hat{A}^+ = \hat{I} \quad (3.54)$$

ب- يعرف التحويل الواحد ψ بأنه التحويل الذي يحصل التابع ψ الى آخر ψ بحيث يكون : $\psi = \hat{U}^+\psi$ ويحول المؤثر \hat{A} الى مؤثر آخر \hat{a} طبقاً للعلاقة $\hat{a} = \hat{U}^+\hat{A}\hat{U}$ ، لنبرهن ان التحويل الواحد يحقق الخواص التالية :

1- يحافظ على العلاقات التبادلية : ليكن لدينا المبدل $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$ ولنجر تحويلاً واحداً عليه فنجد :

$$\hat{U}^+[\hat{A}, \hat{B}]\hat{U} = \hat{U}^+\hat{A}\hat{B}\hat{U} - \hat{U}^+\hat{B}\hat{A}\hat{U} = \hat{U}^+\hat{A}\hat{U}\hat{U}^+\hat{B}\hat{U} - \hat{U}^+\hat{B}\hat{U}\hat{U}^+\hat{A}\hat{U} = \hat{U}^+\hat{C}\hat{U}$$

ومنه :

$$\hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a} = [\hat{a}, \hat{b}] = \hat{C} \quad (3.55)$$

2- يحافظ على هرميتية المؤثرات : في الحقيقة اذا كان لدينا $\hat{A} = \hat{A}^+$ وأجرينا التحويل الواحد التالي :

$$\hat{U}^+\hat{A}\hat{U} = \hat{U}^+\hat{A}^+\hat{U} = \hat{a}^+$$

ثم أخذنا المرافق الزائدي للطرفين فاننا نجد :

$$(\hat{U}^+\hat{A}\hat{U})^+ = \hat{U}^+\hat{A}^+\hat{U} = \hat{U}^+\hat{A}^+\hat{U} = \hat{U}^+\hat{A}\hat{U} \Rightarrow \hat{a}^+ = \hat{a} \quad (3.56)$$

3- يحافظ على القيم الخاصة : لتكن λ القيمة الخاصة للمؤثر \hat{A} بحيث يكون :

$$\hat{A}\psi = \lambda\psi$$

ولنجر التحويل الواحدي وذلك بضرب الطرفين بـ \hat{U}^\dagger فنجد:

$$\hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U} \hat{U}^\dagger \psi = \lambda \hat{U}^\dagger \psi$$

ومنه :

$$\hat{A} \psi = \lambda \psi$$

(3.57)

4 - يحافظ على الجداء العددي والعناصر المصفوفية : في الحقيقة

يكون لدينا :

$$\begin{aligned} \langle \psi_m | \hat{A} | \psi_n \rangle &= \langle \psi_m | \hat{U} \hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U} \hat{U}^\dagger | \psi_n \rangle = \int \psi_m^* \hat{U} \hat{A} \hat{U} \psi_n dx = \\ &= \int \hat{A} \psi_n (\hat{U}^\dagger \psi_m)^* dx = \int \psi_m \hat{A} \psi_n dx = \langle \psi_m | \hat{A} | \psi_n \rangle \end{aligned} \quad (3.58)$$

2- العلاقة بين طيفي مؤثرين :

آ - ليكن المؤثر \hat{A} في الفراغ $L^2(-\infty, +\infty)$ ولنفرض أن نواحيه الخاصة تؤلف قاعدة تامة يمكن نشر أي تابع $f(x)$ بها كما في (3.46) ثم لنضرب طرفي هذه العلاقة من اليسار بالمؤثر \hat{B} فنجد:

$$\hat{B} f(x) = \sum_n a_n \hat{B} \psi_n(x) \quad (3.59)$$

ولحساب $\hat{B} \psi_n(x)$ نضعها بالشكل :

$$\hat{B} \psi_n(x) = \sum_m B_{mn} \psi_m(x) \quad (3.59a)$$

مع العلم أن B_{mn} هو عنصر المصفوفة التالي :

$$B_{mn} = \langle m | \hat{B} | n \rangle = \int \psi_m^*(x) \hat{B} \psi_n(x) dx \quad (3.60)$$

ويسهل التأكد من صحة العلاقة (3.59a) إذا بدلنا (3.60) فيها

$$\sum_m \int \psi_m^*(x') \hat{B} \psi_n(x') dx' \psi_m(x) = \int \hat{B} \psi_n(x) \delta(x-x') dx'$$

حيث نجد :

وهذا المقدار الأخير يساوي $\hat{B} \psi_n(x)$ طبقاً لخواص تابع ديراك

$\psi(x-x')$ ويسهل الآن حساب $\hat{B} f(x)$ بعد تبديل $\hat{B} \psi_n(x)$ بقيمتها في (3.59) حيث نجد :

$$\hat{B} f(x) = \sum_n a_n \sum_m B_{mn} \psi_m(x) = \sum_m a'_m \psi_m(x)$$

مع العلم أن :
وبما أن التوابع ψ_m هي التوابع الخاصة للمؤثر \hat{A} فإن العلاقة السابقة (3.61) تسمح لنا بحساب طيف المؤثر \hat{B} بدلالة طيف المؤثر \hat{A} . ومن الواضح أنه إذا كانت ψ_m تابعة خاصاً أيضاً للمؤثر \hat{B} فإن المصفوفة B_{mn} تصبح قطرية ذلك لأن :

$$B_{mn} = \int \psi_m^* \hat{B} \psi_n dx = b_n \delta_{mn}$$

بـ يمكن الحصول على القيم الخاصة للمؤثر الهرميتي \hat{C} إذا علمت التوابع الخاصة لأي مؤثر آخر \hat{B} وذلك كما يلي :
نفرض أن التوابع الخاصة للمؤثر \hat{C} هي $g_n(x)$ ثم ننشر هذه التوابع بالتوابع الخاصة للمؤثر ما \hat{B} فنجد :
 $g_n(x) = \sum_m A_{nm} \psi_m(x)$
ثم نكتب شرط التوامد التالي للتوابع $g_n(x)$:

$$\begin{aligned} \int g_n^*(x) g_n(x) dx &= \int \left[\sum_i A_{in}^* \psi_i^*(x) \right] \left[\sum_j A_{jn} \psi_j(x) \right] dx = \\ &= \sum_{i,j} A_{in}^* A_{jn} \int \psi_i^*(x) \psi_j(x) dx = \\ &= \sum_{i,j} A_{in}^* A_{jn} \delta_{ij} = \sum_i A_{in}^* A_{in} = \delta_{nn} \end{aligned}$$

وهذا يعني أن المصفوفة A_{nm} هي مصفوفة واحدة أي :

$$\hat{A} \hat{A}^+ = \hat{A}^+ \hat{A} = \hat{I}$$

وهكذا يكون التحويل من التمثيل \hat{B} (حيث توصف الجملة بالتوابع خاصة للمؤثر \hat{B}) إلى التمثيل \hat{C} (حيث توصف الجملة بالتوابع خاصة للمؤثر \hat{C}) واحدياً، وبما أن هذا النوع من التحويل لا يغير من القيم الخاصة فيمكن أن نجد طيف أي مؤثر \hat{B} بأن نأخذ مجموعة توابع تامة (مهما كانت هذه التوابع) وتحسب العناصر المصفوفة التالية :

$$B_{mn} = \int \psi_m^*(x) \hat{B} \psi_n(x) dx \equiv \langle m | \hat{B} | n \rangle$$

ثم نبحث عن مصفوفة \hat{A} بحيث يؤدي التحويل $\hat{A} \hat{B} \hat{A}^+$ الى مصفوفة قطرية، وعندئذ تكون العناصر المصفوفية القطرية b_{nn} هي القيم الخاصة المطلوبة. قد تكون هذه الطريقة طويلة لأن عدد التوابع $\psi_n(x)$ يمكن أن لا يكون محدوداً وبالتالي تكون المصفوفات الناتجة غير منتهية، ولهذا نلجأ الى أسلوب آخر لحساب القيم الخاصة.

ج - يعرف أثر مصفوفة ما، ويرمز له بالرمز Sp بأنه مجموع العناصر القطرية لهذه المصفوفة :

$$Sp(L_{nn}) = \sum_n L_{nn} \quad (3.62)$$

ويمكن البرهان أن أثر مصفوفة ناتجة عن جداء مصفوفتين لا يتغير بتغيير ترتيبهما أي أن :

$$Sp AB = \sum_n \sum_k A_{nk} B_{kn} = \sum_k \sum_n B_{kn} A_{nk} = Sp BA$$

ويمكن تعميم ذلك على جداء ثلاث مصفوفات A و B و C حيث نجد :

$$Sp(ABC) = Sp(BCA) = Sp(CAB)$$

ويمكن البرهان أيضا أن أثر مصفوفة لا يتغير عند اجراء تحويل واحد عليها

$$Sp A = Sp \hat{U}^+ A \hat{U} = Sp a$$

٢٤ - الفرضيات الأساسية في ميكانيك الكم :

آ - يرتكز ميكانيك الكم على عدة فرضيات أساسية هي :

١ - يقابل كل قيمة فيزيائية كلاسيكية مؤثر خطي هرميتي

في ميكانيك الكم .

٢ - يقابل كل حالة فيزيائية للجملة تابع موجي منظم ψ .

٣ - لا يمكن لأي مقدار فيزيائي أن يأخذ سوى القيم الخاصة

للمؤثر المقابل له .

٤ - يحسب الاحتمال الرياضي لوجود مقدار فيزيائي L في الحالة

الموصوفة بالتابع ψ بالعلاقة :

$$\langle L \rangle = \bar{L} = \langle \psi | L | \psi \rangle = \int \psi^* L \psi dx \quad (3.63a)$$

ميكانيك الكم ٢-٧

وفي الحالة الخاصة عندما يكون ψ تابعاً خاصاً للمؤثر \hat{L} بقيمة خاصة λ فإن الاحتمال :

$$\langle \hat{L} \rangle = \int \psi_n^* \lambda \psi_n dx = \lambda_n \quad (3.63b)$$

ويمكن تعميم ذلك لأي مؤثر \hat{L}^k حيث نجد :

$$\langle \hat{L}^k \rangle = \lambda^k \quad (3.63c)$$

وإذا نشرنا التابع ψ بالتواضع الخاصة ψ_n للمؤثر الهرميتي \hat{L} بالشكل $\sum_n c_n \psi_n$ وحسبنا القيمة المتوقعة (الاحتمال السابق) فإننا نجد :

$$\langle \psi | \hat{L} | \psi \rangle = \int \sum_{n,n'} c_n^* \psi_n^* \hat{L} c_n \psi_n dx = \sum_n |c_n|^2 \lambda_n \quad (3.63d)$$

5 - تحقق العناصر المصفوفية لمركبات مؤثر الاحداثيات \hat{x}_i والاندفاعات \hat{p}_i معادلتى هاملتون التاليتين :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f | \hat{p}_i | g \rangle &= - \langle f | \frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i} | g \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle f | \hat{x}_i | g \rangle &= \langle f | \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_i} | g \rangle \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

حيث \hat{H} مؤثر هاملتون المقابل لتابع هاملتون في الميكانيكا الكلاسيكي .

6 - تحقق المؤثرات \hat{x}_i, \hat{p}_i العلاقات التبادلية التالية :

$$\left. \begin{aligned} [\hat{p}_i, \hat{x}_k] &= -i\hbar \delta_{ik} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_k] &= [\hat{x}_i, \hat{x}_k] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

حيث : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}$, $(i, k = 1, 2, 3 \Leftrightarrow x, y, z)$

هذا ومن الواضح أنه يمكن التعبير عن أي مقدار فيزيائي بدلالة p_i, x_i وبالتالي يتحول إلى مؤثر $\hat{L}(p_i, x_i)$ ، فالطاقة الحركية $T(p)$ تصبح مؤثراً $\hat{p}^2/2m$ والكمون $V(x)$ يصبح مؤثراً $\hat{V}(x)$. أما إذا كان مقدار فيزيائي كلاسيكي عبر عنه بدلالة الجداء $p_i x_i$ بالشكل $\sum p_i x_i$ فإنه يصبح مؤثراً هو :

$$W(x_i, p_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\hat{p}_i \hat{x}_i + \hat{x}_i \hat{p}_i) \quad (3.66)$$

والجدير بالذكر أن الزمن لا يعتبر مؤثراً في ميكانيك الكم وإنما مجرد وسيط .

ب - يعرف مشتق مؤثر تابع لـ \hat{L} أي $f(\hat{L})$ بالنسبة لـ \hat{L} كما في الفيزياء الكلاسيكية بالعلاقة :

$$\frac{\partial f(\hat{L})}{\partial \hat{L}} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{f(\hat{L} + \Delta \hat{L}) - f(\hat{L})}{\Delta L} \quad (3.67)$$

لنبرهن أن المؤثر $\hat{p}_i \hat{x}_k - \hat{x}_k \hat{p}_i$ يساوي مقداراً ثابتاً في ميكانيك الكم ولهذا نشق بالنسبة إلى كل من \hat{x}_k و \hat{p}_i على الترتيب فنجد :

$$\frac{d}{dx_k} [\hat{p}_i \hat{x}_k - \hat{x}_k \hat{p}_i] = \hat{p}_i \hat{I} - \hat{I} \hat{p}_i = 0$$

$$\frac{d}{dp_i} [\hat{p}_i \hat{x}_k - \hat{x}_k \hat{p}_i] = \hat{I} \hat{x}_k - \hat{x}_k \hat{I} = 0$$

وبما أن مشتق المقدار بين القوسين يساوي الصفر دوماً فلا بد أنه يساوي مقداراً ثابتاً أي أن :

$$\hat{p}_i \hat{x}_k - \hat{x}_k \hat{p}_i = \text{const.}$$

وهذا الثابت هو بالضبط ما ذكرناه في (3.65).

23 - حساب المؤثرين \hat{p}_i و \hat{x}_i بدلالة بعضهما :

لنحسب أولاً المبدل $[\hat{p}_i, \hat{x}_i]$ ولهذا نكتب :

$$[\hat{p}_i, \hat{x}_i^2] = \hat{p}_i \hat{x}_i^2 - \hat{x}_i^2 \hat{p}_i = \hat{p}_i \hat{x}_i \hat{x}_i - \hat{x}_i \hat{p}_i \hat{x}_i + \hat{x}_i \hat{p}_i \hat{x}_i - \hat{x}_i \hat{x}_i \hat{p}_i = -i\hbar \hat{x}_i$$

$$[\hat{p}_i, \hat{x}_i^2] = -i\hbar \frac{\partial \hat{x}_i^2}{\partial \hat{x}_i} \quad \text{أي أن :} \quad (3.68a)$$

وبالطريقة نفسها نبرهن كتعميم

$$[\hat{p}_i, \hat{x}_i^n] = -i\hbar \frac{\partial \hat{x}_i^n}{\partial \hat{x}_i} \quad (3.68b)$$

وبما أنه يمكن نشر أي تابع $\psi(x)$ فيمكننا أن نكتب،
كتعميم لـ (3.68b)

$$[\hat{p}_i, \psi(\hat{x})] = \hat{p}_i \psi(\hat{x}) - \psi(\hat{x}) \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} \quad (3.68c)$$

ولكي نوجد الشكل الصريح للمؤثر \hat{p}_i بدلالة \hat{x}_i نحسب تأثيره على تابع ما للأحداثيات ولهذا نأخذ التابع التابع المساعد $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1$ ونؤثر عليه بالمؤثر \hat{p}_i فنجد تابعا آخر $f_i(x_1, x_2, x_3)$ طبقاً للعلاقة :

$$\hat{p}_i \psi(x_1, x_2, x_3) = f_i(x_1, x_2, x_3) \quad (3.69)$$

ثم نضرب طرفي العلاقة (3.68c) من اليمين بالتابع $\psi(x_1, x_2, x_3) = 1$ فنجد:

$$\hat{p}_i \psi(x) \psi(x_1, x_2, x_3) - \psi(x) \hat{p}_i \psi(x_1, x_2, x_3) = -i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} \psi(x_1, x_2, x_3)$$

أو بالشكل :

$$\hat{p}_i \psi(x) = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi(x) f_i$$

ومن أجل $i=1$ يكون:

$$\hat{p}_1 \psi(x) = -i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_1} + \psi(x) f_1 \quad (3.70)$$

وهكذا نحصل على علاقتين مشابھتين عندما $i=2$ ، $i=3$. وهذا يعني أن تأثير \hat{p}_i على أي تابع يكافئ ضربه من اليسار بـ $-i\hbar (\partial/\partial x_i)$ ثم إضافة المقدار $f_i \psi$ وبناء عليه نحسب $\hat{p}_1 \hat{p}_2 \psi$ كما يلي :

$$\hat{p}_1 \hat{p}_2 \psi = \hat{p}_1 (-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + f_2 \psi) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1} (-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + f_2 \psi) + f_1 (-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + f_2 \psi) =$$

$$= (-i\hbar)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} - i\hbar (\psi \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}) - i\hbar f_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + f_1 f_2 \psi \quad (3.71a)$$

بالطريقة نفسها نجد :

$$\hat{p}_2 \hat{p}_1 \psi = (-i\hbar)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_1} - i\hbar (\psi \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_2}) - i\hbar f_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + f_2 f_1 \psi \quad (3.71b)$$

ومن السهل حساب المبدل $[\hat{p}_1, \hat{p}_2]$ الآن الذي يساوي الصفر طبقاً لـ (3.65) وبالتالي يكون :

$$[\hat{p}_1, \hat{p}_2] \psi = -i\hbar (\psi \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \psi \frac{\partial f_1}{\partial x_2}) = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

أي أن :

$$(3.72a)$$

بالطريقة نفسها نستنتج :

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0$$

$$(3.72b)$$

ويمكن اختصار العلاقات الثلاث السابقة بعلاقة واحدة إذا فرضنا متجهاً \vec{f} مركباته f_1, f_2, f_3 وعليه يكون :

$$\text{rot } \vec{f} = 0$$

$$(3.73)$$

وبالتالي يجب أن يكون المتجه \vec{f} تدرجاً لكمية سلمية $F(x_1, x_2, x_3)$ أي $\vec{f} = \text{grad } F(x_1, x_2, x_3)$ وبالتالي فالمركبات f_i تعطى بالعلاقات :

$$f_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad f_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad f_3 = \frac{\partial F}{\partial x_3}$$

وبالتبديل في (3.70) نحصل على عبارة \hat{p}_i التالية :

$$\hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

$$(3.74)$$

غير أنه يمكن تبسيط هذه العلاقة وحذف الحد الأخير منها بإجراء تحويل واحد عليها بواسطة مؤثر واحد \hat{U}^\dagger لا يغير المبدلات ولا هرمية المؤثرات ولا القيم الخاصة ولا العناصر المصفوفية . ولهذا نأخذ المؤثر \hat{U}^\dagger ونجري التحويل $\hat{U}^\dagger \hat{p} \hat{U}$. فإذا اخترنا \hat{U}^\dagger بالشكل $\hat{U} = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{F}}$ و $\hat{U}^\dagger = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{F}}$ وطبقناه على (3.74) ثم ضربنا الناتج من اليمين بـ $\psi(x)$ فإننا نجد :

$$\begin{aligned} \hat{p}_i \psi(x) &= e^{\frac{i}{\hbar} \hat{F}} \hat{p}_i e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{F}} \psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{F}} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{F}} \psi(x) = \\ &= -i\hbar e^{\frac{i}{\hbar} \hat{F}} \left(-\frac{i}{\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{F}} \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i} \psi(x) - e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{F}} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) + e^{\frac{i}{\hbar} \hat{F}} \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{F}} \psi(x) \end{aligned}$$

ومنه نجد بعد الاصلاح : $\hat{p}_i \psi(x) = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ أي أن :

$$\hat{p} = -i\hbar \nabla \quad (3.75)$$

وهي علاقة هامة في ميكانيك الكم نستطيع بواسطتها تحويل أي قيمة كلاسيكية تابعة للاندفاع p الى مؤثر .

ولكي نحسب المؤثر \hat{x}_i بدلالة \hat{p}_i نلاحظ مباشرة أن المعادلات الأساسية (3.65) لاتنص صراحة على أن يكون متحول التابع الموجسي هو \hat{x} ، اذ يمكن وبالنجاح نفسه ، أن نختار المتحول \hat{p} . وهكذا نحصل وبالطريقة السابقة نفسها على عبارة المؤثر \hat{x} في التمثيل الاندفاعي حيث نجد :

$$\hat{x}_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.76)$$

24 - حساب التوابع الخاصة للمؤثرين \hat{p} و \hat{x} :

لنحسب القيم الخاصة والتوابع الخاصة لكل من المؤثرين الاندفاعات p . ان معادلة القيم الخاصة لمؤثر $\hat{x} = i\hbar(\partial/\partial p)$ في فراغ $\hat{p}_x = -i\hbar(\partial/\partial x)$ في فراغ الاحداثيات x و $\hat{x} = i\hbar(\partial/\partial p)$ في فراغ الاندفاعات p . ان معادلة القيم الخاصة لمؤثر الاندفاع من الشكل :

$$\hat{p}_i \psi = p_i \psi \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = p_i \psi$$

$$\psi(x_i) = A e^{\frac{i}{\hbar} p_i x_i}$$

وبالحل نجد :
ولحساب الثابت A ننظم التابع ψ بعد ملاحظة أن الطيف مستمر طبقاً لـ (3.55) حيث نجد :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x') \psi(x) dx = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar} p(x-x')} dx = \delta(x-x')$$

$$A^2 2\pi\hbar \delta(x-x') = \delta(x-x')$$

ومنه :

$$A^2 = 1/2\pi\hbar \Rightarrow A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$$

أو :

وبالطريقة نفسها نحسب القيم الخاصة للمؤثر \hat{x} في فراغ الاندفاع حيث نجد :
 $i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi(p) = x \psi(p)$ ، ومنه $\psi(p) = A e^{\frac{i}{\hbar} x p}$
وبحساب الثابت نجد $A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$ ، وخلاصة القول أننا نحصل على تابعين متماثلين في كل من الفراغين وهما :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} p x} , \quad \psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar} x p} \quad (3.79)$$

25- تمثيل هايزنبرغ ، تمثيل شرودنجر :

آ- نلاحظ أن المعادلة الأساسية (الفرضية الخامسة) تتحقق

بأحد شكلين :

(Heisenberg equations) :

1- معادلات هايزنبرغ

نفرض أن التوابع الموجية لا تتعلق بالزمن أما المؤثرات فتحتوي الزمن وعندئذ نجد من (3.64)، بعد إجراء الاشتقاق والانتقال إلى المؤثرات واختصار التوابع نجد المعادلتين :

$$\frac{d\hat{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{x}_i} \quad , \quad \frac{d\hat{x}_i}{dt} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i} \quad (3.78)$$

ومن المبدل (3.68c) نحسب $(\partial \hat{H} / \partial \hat{x}_i)$ ، ثم وبالطريقة نفسها نحسب

$$-i\hbar \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{x}_i} = [\hat{p}_i, \hat{H}] \quad , \quad +i\hbar \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i} = [\hat{x}_i, \hat{H}] \quad (3.79)$$

وبالمعدل في (3.78) نحصل على معادلتى هايزنبرغ التاليتين :

$$\frac{d\hat{p}_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{p}_i, \hat{H}] \quad , \quad \frac{d\hat{x}_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{x}_i, \hat{H}] \quad (3.80)$$

ويسدو بوضوح من هاتين العلاقتين أن شرط استقرار (ثبات) أي كمية فيزيائية هو أن يتبادل المؤثر المقابل لها مع مؤثر هاميلتون ، وهذا ما يذكرنا بأقواس بواسون في الميكانيك الكلاسيكي التي تقابل المبدلات في ميكانيك الكم .

2 - معادلة شرودنجر (Schrödinger equation) :

آ - نفرض أن المؤثرات لا تتعلق بالزمن ولكن التوابع الموجية تحوي الزمن وعندئذ إذا بدلنا $\partial\hat{H}/\partial\hat{x}_i$ بقيمتها من (3.79) في (3.64) فإننا نحصل على المعادلة :

$$\frac{d}{dt} \langle f | \hat{p}_i | g \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle f | [\hat{p}_i, \hat{H}] | g \rangle \quad (3.81)$$

وبفك قوى المبدل في الطرف الأيمن وإجراء الاشتقاق في الطرف الأيسر بعد ملاحظة أن الزمن موجود فقط في التوابع f و g لافي المؤثرات ، نحصل على المعادلة :

$$\langle \frac{\partial f}{\partial t} | \hat{p}_i | g \rangle + \langle \hat{p}_i f | \frac{\partial g}{\partial t} \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle f | \hat{p}_i \hat{H} | g \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle f | \hat{H} \hat{p}_i | g \rangle \quad (3.82)$$

وإذا استفدنا من هرميتية المؤثرات في الطرف الأيمن فإننا نجد أن هذا الطرف يتحول الى الشكل :

$$-\frac{i}{\hbar} \langle f | \hat{p}_i \hat{H} | g \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle f | \hat{H} \hat{p}_i | g \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \hat{p}_i f | \hat{H} g \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle \hat{H} f | \hat{p}_i g \rangle$$

وبالتعويض في (3.82) ودمج الحدود المتشابهة في الطرفين والانتباه الى تغير إشارة (i/\hbar) باعتبارها دخلت ضمن الجداء السلمي

فاننا نجد أخيراً :

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \hat{H} f \mid \hat{P} g \right\rangle + \left\langle \hat{P} f \mid \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \hat{H} g \right\rangle = 0$$

ولكي نتحقق هذه المعادلة مهما كانت كل من f و g يجب أن يكون:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} f, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} g$$

فاذا رمزنا لكل من f و g بالتابع ψ فاننا نحصل على المعادلة الأهم في ميكانيك الكم وهي :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (3.83)$$

وهي معادلة شرودنغر غير المستقرة (المتعلقة بالزمن) التي استخدمناها في الفصل الثاني والتي استنتجناها هناك بطريقة أقل دقة .

ب - ان كلاً من تمثيل شرودنغر وتمثيل هايزنبرغ ينتج من الفرضية الخامسة المعبر عنها بالمعادلات (3.64)، ولهذا يجب أن تتطابق متوسطات القيم الفيزيائية في التمثيلين ، ولكي يتم ذلك يجب أن ينتج أحدهما عن الآخر بتحويل واحد ، وهذا ما نريد اثباته الآن ؛ حيث سنبرهن أن المؤثر $\hat{S} = \frac{i}{\hbar} \hat{H} t$ هو المؤثر الواحد المطلوب . لنرمز لكل من المؤثر والتابع بـ \hat{L} و f على الترتيب في تمثيل هايزنبرغ يقابلها \hat{A} و ψ في تمثيل شرودنغر . وبالتالي يجب أن تتحقق العلاقتان التاليتان عند التحويل من تمثيل هايزنبرغ الى تمثيل شرودنغر .

$$\psi = \hat{S}^+ f, \quad \hat{A} = \hat{S}^+ \hat{L} \hat{S} \quad (3.84)$$

نشتق الأولى بالنسبة للزمن بعد ملاحظة أن f لا يتعلق بالزمن ،

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \hat{S}^+}{\partial t} f = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} (\hat{S}^+ f) = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi$$

وهي معادلة شرودنغر للتابع ψ .
واللحصول على معادلتى هايزنبرغ نشتق المعادلة الثانية من (3.84)

بالنسبة للزمن فنجد (بعد ضرب طرفيها من اليسار ومن اليمين \hat{S}^+)
على الترتيب مع العلم أن \hat{A} لا يحوي الزمن :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} \hat{A} \hat{S}^+ + \hat{S} \hat{A} \frac{\partial \hat{S}^+}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{S} \hat{A} \hat{S}^+ - \frac{i}{\hbar} \hat{S} \hat{A} \hat{S}^+ \hat{H} \\ &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H} \hat{L} - \hat{L} \hat{H}] = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{L}]\end{aligned}$$

وهي معادلة هايزنبرغ للمؤثر \hat{L} .
ج - لقد حصلنا في الفصل الثاني على معادلة شرودنجر
بطريقة بسيطة، وكان من الضروري، بعد دراسة المؤثرات البرهان
أن هذه المعادلة تنتج من الفرضيات الأساسية وهذا ما فعلناه في
هذه الفقرة .

إن جوهر المسألة في ميكانيك الكم يتلخص في حل هذه المعادلة
وحساب القيم الخاصة (طيف الطاقة) والتوابع الخاصة ψ_n والحصول على
التابع الموجي ψ كتركيب خطي لهذه التوابع مع العلم أن مربع
التابع ψ أي $\psi^* \psi = |\psi|^2$ يساوي الكثافة الاحتمالية لوجود الجسيم
في الفراغ، مع أن هذه الكثافة لاتتعلق بالزمن عندما يوصف الجسيم
بمعادلة شرودنجر المستقرة التالية :

$$i\hbar \frac{\partial \psi_n(x,t)}{\partial t} = E_n \psi_n(x,t) = \hat{H} \psi_n(x,t) \quad (3.85)$$

أو بالشكل : $\frac{d\psi_n}{\psi_n} = -i \frac{E_n}{\hbar} dt$ ومنه نجد بعد الاستكمال بالزمن :

$$\psi_n(x,t) = e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} \psi_n(x) \quad (3.86)$$

أن الكثافة الاحتمالية لوجود الجسيم في الحالة n وفي النقطة x في
الزمن t ، فهي، كما يبدو، مستقلة عن الزمن لأن :

$$|\psi_n(x,t)|^2 = |\psi_n(x)|^2$$

ولذلك يقال عن هذه الحالات أنها مستقرة، ويكون متوسط أي مبدل
من النوع $[\hat{H}, \hat{A}]$ يساوي الصفر مهما كان \hat{A} لأن :

$$\begin{aligned} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle &= \langle (\hat{H}\hat{A} - \hat{A}\hat{H}) \rangle = \langle n | \hat{H}\hat{A} - \hat{A}\hat{H} | n \rangle = \\ &= E_n \langle n | \hat{A} | n \rangle - E_n \langle n | \hat{A} | n \rangle = 0 \quad (3.87) \end{aligned}$$

26 - دعوى فيرييل :

لنطبق العلاقة السابقة (3.87) عندما نأخذ عوضاً عن المؤثر \hat{A} المؤثر \hat{W} المعطى بالعلاقة (3.66) ولنحسب ، نتيجة لذلك ، العلاقة بين الطاقة الحركية $T(p_x, p_y, p_z)$ والطاقة الكامنة $V(x, y, z)$ وسنقتصر على دراسة بعد واحد ، ومن السهل أن نعمم بعد ذلك . ان متوسط المبدل $[\hat{W}, \hat{H}]$ يساوي :

$$\begin{aligned} R &= \langle \psi | [\hat{W}, \hat{H}] | \psi \rangle = \langle \psi | [\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}, \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x)] | \psi \rangle \\ \text{فاذا علمنا أن } \hat{p}\hat{x} &= -i\hbar + \hat{x}\hat{p} \text{ وأن } i\hbar \text{ يتبادل مع } \hat{H} \text{ فاننا} \\ \text{نجد :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \langle \psi | [2\hat{x}\hat{p}, \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x)] | \psi \rangle = \\ &= 2 \langle \psi | [\hat{x}\hat{p}, \frac{\hat{p}^2}{2m}] + [\hat{x}\hat{p}, \hat{V}(x)] | \psi \rangle \quad (3.88) \end{aligned}$$

لنحسب المبدل $[\hat{x}\hat{p}, \frac{\hat{p}^2}{2m}]$ فنجد :

$$[\hat{x}\hat{p}, \frac{\hat{p}^2}{2m}] = \frac{1}{2m} [\hat{x}\hat{p}^2 - \hat{p}^2\hat{x}] \hat{p} = i\hbar \frac{\hat{p}^2}{2m} = i\hbar T$$

$$[\hat{x}\hat{p}, \hat{V}(x)] = -i\hbar x \frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

وكذلك نحسب المبدل الآخر :

وبالتعويض في (3.88) نحصل على المعادلة التي ينعدم طرفها طبقاً

لـ (3.87) أي أن :

$$\langle \psi | \hat{W}\hat{H} - \hat{H}\hat{W} | \psi \rangle = i\hbar \left\{ \langle \psi | 2T | \psi \rangle - \langle \psi | x \frac{\partial V}{\partial x} | \psi \rangle \right\} = 0$$

واذا فرضنا الآن أن الجسم يخضع لكمون من الشكل $V(r) = V_0 r^n$ واستخدمنا الاحداثيات الكروية ، نجد بعد تعميم العلاقة السابقة والاختصار على \hbar ما يلي :

$$\langle \psi | \nabla^2 | \psi \rangle - \langle \psi | r \nabla^2 | \psi \rangle = 0$$

(3.89)

ثم اذا حسبنا $r \nabla^2$ فاننا نجد :

$$r \nabla^2 = r \frac{\partial^2}{\partial r^2} = n r \nabla_0 \cdot r^{n-1} = n \nabla$$

وبالتعويض في (3.89) نجد أخيراً التعبير الرياضي عن دعوى فيريال:

$$\bar{T} = \frac{n}{2} \bar{V}$$

(3.90)

لنبرهن في نهاية هذه الفقرة علاقة ثانية تحققها الحالات المستقرة، ولهذا نأخذ المبدل $[\hat{r}, \hat{H}]$ الذي يساوي $(\hbar p/m)$ ونحسب العنصر المصفوفي

$$\frac{i\hbar}{m} \langle \psi_n | \hat{r} | \psi_k \rangle = \langle \psi_n | \hat{r} \hat{H} - \hat{H} \hat{r} | \psi_k \rangle$$

من الطرفين فنجد :

والاستفادة من هرميتية المؤثر \hat{H} نضع الطرف الأيمن بالشكل:

$$: E_k \langle \psi_n | \hat{r} | \psi_k \rangle - E_n \langle \psi_n | \hat{r} | \psi_k \rangle$$

$$\frac{i\hbar}{m} \langle \psi_n | \hat{r} | \psi_k \rangle = (E_k - E_n) \langle \psi_n | \hat{r} | \psi_k \rangle \quad (3.91)$$

وهي العلاقة المطلوبة .

٤٦ - دراسة الهزاز التوافقي بطريقة المؤثرات . حساب القيم الخاصة والتوابع الخاصة :

سنرى في الفقرة كيف أنه يمكن الوصول الى النتائج نفسها التي حصلنا عليها في الفصل السابق ، فنحسب طاقة الهزاز التوافقي وتوابعه الخاصة ولكن دون حل معادلة شرودنغر هذه المرة وانما بالاستفادة من المؤثرات لاغير .

ليكن مؤثر هاملتون التالي للهاز :

$$\hat{H} = \hat{P}^2/2m + m\omega^2 \hat{x}^2/2$$

ولنجر التحويل التالي :

$$\hat{P} = \hat{P}/\sqrt{m\omega\hbar}, \quad \hat{Q} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x}$$

فنجد أن \hat{H} يتحول الى الشكل :

(3.92)

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{P}^2 + \hat{Q}^2)$$

أما العلاقة بين المؤثرين \hat{P} و \hat{Q} فتحسب كما يلي :

$$\hat{p} = \frac{1}{i\hbar} p = \frac{-i\hbar}{i\hbar} \frac{\partial}{\partial x} = -i \frac{\partial}{\partial x}$$

ولحساب المبدل $[\hat{p}, \hat{q}]$ نكتب :

$$[\hat{p}, \hat{q}] f(\hat{q}) = [-i \frac{\partial}{\partial x}, \hat{q}] f(\hat{q}) = -i f'(\hat{q})$$

$$[\hat{p}, \hat{q}] = -i$$

أي أن :
(3.93)

لنعرف الآن المؤثر \hat{a} بالعلاقة :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q} + i\hat{p}) \quad (3.94)$$

ومرافقه الزائدي :

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q} - i\hat{p}) \quad (3.95)$$

ولنحسب المبدل $[\hat{a}, \hat{a}^+]$ فنجد :

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a} \hat{a}^+ - \hat{a}^+ \hat{a} = 1 \quad (3.96)$$

ثم نعبر عن المؤثر \hat{H} بدلالة المؤثرين \hat{a} و \hat{a}^+ ولهذا نحسب $\hat{p}^2 + \hat{q}^2$ فنجد أولاً بحل المعادلتين (3.94) و (3.95) بالنسبة إلى

$$\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^+ - \hat{a}), \quad \hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^+ + \hat{a})$$

$$\hat{p}^2 + \hat{q}^2 = \hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+ \quad \text{فنجد :}$$

وبالتربيع والجمع نحصل على العلاقة :

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+) = \frac{\hbar\omega}{2} (2 \hat{a}^+ \hat{a} + 1) = \hbar\omega (\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2}) = \hbar\omega (\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2}) \quad (3.97)$$

وسنحسب الآن القيم الخاصة للمؤثر \hat{H} بالاستناد إلى ماسبق ولذلك نكتب معادلة شرودنغر التالية (باستخدام رموز ديراك) :

$$\hat{H}|\psi\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} (2 \hat{a}^+ \hat{a} + 1) |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

التي توضع بالشكل :

$$(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2}) |\psi\rangle = (\hat{a} \hat{a}^+ - \frac{1}{2}) |\psi\rangle = \frac{E}{\hbar \omega} |\psi\rangle = \epsilon |\psi\rangle \quad (3.98a)$$

$$\hat{H} |\psi_\epsilon\rangle = \epsilon |\psi_\epsilon\rangle$$

أو :

$$\hat{H} = \frac{\hat{H}}{\hbar \omega} = \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} = \hat{a} \hat{a}^+ - \frac{1}{2} \quad (3.98b)$$

حيث $\epsilon = E / \hbar \omega$ و $|\psi_\epsilon\rangle$ هو التابع الخاص (الكيت) الموافق للقيمة هاملتون المختزل) و \hat{H} الخاصة للمؤثر \hat{H} . وهذا ما سنفعله فيما يلي بالاستناد إلى جبر المؤثرات . لنؤثر على طرفي المعادلة (3.98) بالمؤثر \hat{a}^+ فنجد:

$$\hat{a}^+ (\hat{a} \hat{a}^+ - \frac{1}{2}) |\psi_\epsilon\rangle = \hat{a}^+ \epsilon |\psi_\epsilon\rangle = \epsilon \hat{a}^+ |\psi_\epsilon\rangle$$

ومن ثم :

$$(\hat{a}^+ \hat{a} - \frac{1}{2}) \hat{a}^+ |\psi_\epsilon\rangle = \epsilon \hat{a}^+ |\psi_\epsilon\rangle \quad (3.98c)$$

فإذا علمنا أنه طبقاً لـ (3.97) يكون : $\hat{a}^+ \hat{a} - \frac{1}{2} = \hat{H} - 1$ وبالتالي يمكن وضع المعادلة السابقة بالشكل :

$$(\hat{H} - 1) (\hat{a}^+ |\psi_\epsilon\rangle) = \epsilon (\hat{a}^+ |\psi_\epsilon\rangle) \Rightarrow \hat{H} (\hat{a}^+ |\psi_\epsilon\rangle) = (\epsilon + 1) (\hat{a}^+ |\psi_\epsilon\rangle) \quad (3.99d)$$

وبما أن $\epsilon + 1$ تتعلق بالقيمة الخاصة التالية فلا بد أن يتعلق $\hat{a}^+ \psi_\epsilon$ بالتابع الخاص الذي يلي ψ_ϵ أي أن :

$$(3.99)$$

$$\hat{a}^+ \psi_\epsilon = q \psi_{\epsilon+1}$$

حيث q عدد ثابت يمكن حسابه من شرط التنظيم ، ولهذا نكتب الجداء العددي :

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^+ \psi_\epsilon | \hat{a}^+ \psi_\epsilon \rangle &= (\langle \psi | (\hat{a}^+)^+ \hat{a}^+ |\psi_\epsilon\rangle)^* = \langle \psi_\epsilon | \hat{a} \hat{a}^+ |\psi_\epsilon\rangle = \\ &= q^2 \langle \psi_{\epsilon+1} | \psi_{\epsilon+1} \rangle = q^2 \end{aligned} \quad (3.100)$$

ومن جهة ثانية يمكن حساب $\hat{a} \hat{a}^+ |\psi_\epsilon\rangle$ و $\hat{a}^+ \hat{a} |\psi_\epsilon\rangle$ انطلاقاً من (3.98a) حيث نجد:

$$\hat{a} \hat{a}^+ |\psi_\epsilon\rangle = (\epsilon + \frac{1}{2}) |\psi_\epsilon\rangle \text{ و } \hat{a}^+ \hat{a} |\psi_\epsilon\rangle = (\epsilon - \frac{1}{2}) |\psi_\epsilon\rangle \quad (3.101)$$

وبالاستفادة من (3.100) نحسب قيمة q^2 حيث نجد:

$$\langle \psi_\epsilon | \hat{a} \hat{a}^+ |\psi_\epsilon\rangle = q^2 \langle \psi_{\epsilon+1} | \psi_{\epsilon+1}\rangle = (\epsilon + \frac{1}{2}) \langle \psi_\epsilon | \psi_\epsilon\rangle$$

ومنـه :

$$q = \sqrt{(\epsilon + \frac{1}{2})} \quad (3.102)$$

وعندئذ نجد بالتعويض في (3.99) أن :

$$\hat{a}^+ |\psi_\epsilon\rangle = \sqrt{\epsilon + \frac{1}{2}} |\psi_{\epsilon+1}\rangle \quad (3.103a)$$

وإذا أعدنا الخطوات نفسها انطلاقاً من عبارة \hat{H} الثانية التي تساوي $\hat{a}^+ \hat{a} - \frac{1}{2}$ فإننا نجد:

$$\hat{a} |\psi_\epsilon\rangle = \sqrt{\epsilon - \frac{1}{2}} |\psi_{\epsilon-1}\rangle \quad (3.103b)$$

فالمؤثر \hat{a}^+ يزيد في التابع الخاص وبالتالي في القيمة الخاصة فهو دائماً ينقلنا الى التابع التالي ولذلك يسمى مؤثر الخلق أو مؤثر التكوين (Creation operator). أما المؤثر \hat{a} فهو يقص من القيمة الخاصة وبالتالي ينقلنا الى التابع الأخفض ولهذا يسمى مؤثر الانعدام أو الغناء (Annihilation operator). لنحسب أصغر طاقة ممكنة ولهذا نؤثر بالمؤثر \hat{a} على أول تابع خاص $|\psi_0\rangle$ ومن الطبيعي أن يكون المقداره $\hat{a} |\psi_0\rangle = 0$ لأنه لا يوجد توابع أخفض من $|\psi_0\rangle$ ، ثم نؤثر بـ \hat{a}^+ على $\hat{a} |\psi_0\rangle$ فنجد:

$$\hat{a}^+ \hat{a} |\psi_0\rangle = \hat{a}^+ \cdot 0 = 0 \Rightarrow \hat{a}^+ \hat{a} |0\rangle = 0$$

(حيث رمزنا لـ $|\psi_0\rangle$ بالرمز $|0\rangle$) ثم نؤثر بـ \hat{H} على هذه

الحالة $|0\rangle$ فنجد:
 $\hat{H}|0\rangle = (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})|0\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle$
 ومنه نجد أصغر طاقة ممكنة هي $\epsilon = \frac{1}{2}$ وهذا يقابل طاقة E
 تساوي $\hbar\omega/2$. وبما أنه طبقاً لـ (3.98d) يجب أن تزداد الطاقة
 بمقدار $\hbar\omega$ عندما تنتقل إلى الحالة التالية فان الطاقة التالية
 $\epsilon_1 = \frac{1}{2} + 1$ أما الطاقة المقابلة للحالة $|\psi_1\rangle = |1\rangle$ فهي:
 $\epsilon_n = n + \frac{1}{2} \Rightarrow E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ (3.104)

وهكذا حصلنا الآن على القيم الخاصة نفسها التي حصلنا عليها في
 الفصل الثاني انطلاقاً من حل معادلة شرودنغر. هذا ويتم حساب
 التوابع الخاصة كما يلي:
 نؤثر أولاً بالمؤثر \hat{a} على الحالة $|0\rangle$ فنجد:

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q} + i\hat{P})|0\rangle = 0$$

ومنـه :

$$\hat{Q}|0\rangle \equiv \hat{Q}|\psi_0\rangle = (-i)(-i)\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_0\rangle$$

وبحل هذه المعادلة التفاضلية نجد:

$$|0\rangle \equiv |\psi_0\rangle = \psi_0 = A_0 e^{-Q^2/2}$$

ولحساب A_0 نستخدم شرط التنظيم :

$$\langle 0|0\rangle = A_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Q^2} dQ = 1 \Rightarrow A_0 = \pi^{-1/4}$$

وبالتالي يكون التابع المنظم المقابل للحالة $|0\rangle$ هو :

$$\psi_0(Q) = \pi^{-1/4} e^{-Q^2/2}$$

وبتبديل Q بقيمتها بدلالة x نحصل على النتيجة نفسها التي
 رأيناها في الفصل الثاني.

ولحساب $\psi_n(Q)$ نستخدم العلاقة (3.103a) التي توضع بالشكل :

$$\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle \equiv \hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle \equiv \hat{a}^\dagger\psi_n \equiv \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{\epsilon_{n+1}}\psi_{n+1} = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

وإذا أثر \hat{a}^+ على التابع الأخفض بمرتبة فإننا نحصل على المعادلة:

$$\hat{a}^+ |n-1\rangle = \sqrt{n} |n\rangle$$

ومنه نحسب التابع الخاص $|n\rangle$ بدلالة $|n-1\rangle$ ثم بدلالة $|n-2\rangle$... وهكذا حتى نصل إلى التابع الخاص الأول $|0\rangle$ الذي حسبناه سابقاً أي أن:

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^+}{\sqrt{n}} |n-1\rangle = \frac{\hat{a}^+}{\sqrt{n}} \frac{\hat{a}^+}{\sqrt{n-1}} |n-2\rangle = \frac{\hat{a}^+}{\sqrt{n}} \frac{\hat{a}^+}{\sqrt{n-1}} \frac{\hat{a}^+}{\sqrt{n-2}} |n-3\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

وبتعويض $(\hat{a}^+)^n$ بقيمتها $\frac{1}{\sqrt{2}} (Q - \frac{\partial}{\partial Q})^n$ نحصل على العلاقة:

$$\psi_n \equiv |n\rangle = \left(\frac{2^n n!}{\sqrt{\pi}} \right)^{-1/2} \left(Q - \frac{\partial}{\partial Q} \right)^n e^{-Q^2/2}$$

وبفك القوس نجد أخيراً أنه يمكن التعبير عن ψ_n بدلالة كثيرة حدود هرميت $H_n(Q)$ حيث نحصل أخيراً على ψ_n بالشكل:

$$\psi_n(Q) = \left(\frac{2^n n!}{\sqrt{\pi}} \right)^{-1/2} H_n(Q) e^{-Q^2/2}$$

حيث $Q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ وهي النتائج نفسها التي حصلنا عليها في الفصل السابق.



مسائل الفصل الثالث

1- المؤثران \hat{A} و \hat{B} هرميتيان وخطيان ويحققان العلاقة
 $i\hbar [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ وليكن التكامل :

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{A}\psi + i\alpha\hat{B}\psi|^2 dx$$

حيث α وسيط حقيقي ($\alpha \in \mathbb{R}$) غير تابع للاحداثيات .

آ- برهن صحة العلاقة : $\langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \hbar^2/4$

ب- استنتج علاقة الشك التي تربط الاحداثي \hat{x} بالاندفاع \hat{p}_x .

ج- استغف من ذلك لحساب أصغر طاقة لهزاز توافقي كمونه:

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

2- آ- أحسب المبدل $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]$ بدلالة المبدلين $[\hat{A}, \hat{B}]$ ، $[\hat{A}, \hat{C}]$.

ب- استغف من ذلك لحساب المبدلين $[\hat{p}_x, \hat{x}^2]$ ، $[\hat{p}_x, \hat{x}^4]$ ، $[\hat{x}, \hat{p}_x^2]$ ، $[\hat{x}, \hat{p}_x^4]$.

3- ليكن $\hat{A}(t)$ ، $\hat{B}(t)$ مؤثرين تابعين للزمن t ، ولنعرف مشتق مؤثر بالنسبة للزمن بالعلاقة :

$$\frac{d}{dt} \hat{A}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{A}(t+\Delta t) - \hat{A}(t)}{\Delta t}$$

والمطلوب البرهان على ما يلي :

$$\frac{d}{dt} [\hat{A}(t), \hat{B}(t)] = \left[\frac{d}{dt} \hat{A}(t), \hat{B}(t) \right] + \left[\hat{A}(t), \frac{d}{dt} \hat{B}(t) \right] \quad \text{آ}$$

$$\frac{d}{dt} \hat{A}^{-1}(t) = -\hat{A}^{-1}(t) \left(\frac{d}{dt} \hat{A}(t) \right) \hat{A}^{-1}(t) \quad \text{ب}$$

4- ليكن الكمون الشعاعي $\vec{A}(r)$ الذي يشق منه الحقل المغناطيسي

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{احسب المقدار}$$

5- قارن بين المؤثرين $(\nabla_x \hat{x})^2$ ، $(\hat{x} \nabla_x)^2$.

6- اذا علمت أن $[\hat{C}, \hat{A}] = \lambda \hat{A}$ وأن $\hat{a}\psi = a\psi$ فاحسب $\hat{C}\hat{a}\psi$.

7- اذا علمت أن $[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{c}$ ، $[\hat{c}, \hat{a}] = \lambda \hat{a}$ فاحسب $[\hat{b}, \hat{c}]$.

(توجيه : استخدم مطابقة جاكوبي)

8- احسب المرافقات الزائدية للمؤثرات التالية :

$$\frac{\partial}{\partial x} , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} , \quad \frac{\partial^3}{\partial x^3} , \quad \Delta \equiv \nabla^2$$

ثم استنتج اذا كانت هذه المؤثرات هرميتية أم لا .
 9 - ليكن المؤثران \hat{a}, \hat{a}^+ اللذان يحققان العلاقة $[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{I}$ ،
 ولتكن المؤثرات :

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{a}^+ \hat{a}^+ + \hat{a} \hat{a}}{4}, \quad \hat{A}_2 = \frac{\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+}{4}, \quad \hat{A}_3 = i \frac{\hat{a}^+ \hat{a}^+ - \hat{a} \hat{a}}{4}$$

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] : (i, j = 1, 2, 3)$$

$$[\hat{F}, \hat{R}] = \hat{F}\hat{R} - \hat{R}\hat{F} = \hat{I} \quad \text{العلاقة : } \hat{F}, \hat{R}$$

والمطلوب حساب المبدل

10 - آ - اذا حقق المؤثران

$$[\hat{F}, \hat{R}^4]$$

ب - احسب المبدل $[\hat{F}, \hat{R}^n]$ استناداً الى الطلب الاول ثم
 استنتج المبدل $[\hat{F}, \hat{R}^{n+1}]$ واستفد من ذلك لحساب المبدل

$$[\hat{F}, g(\hat{R})]$$

11 - اذا فرضنا أن \hat{b}, \hat{c} مؤثران ما فأثبت صحة العلاقة :

$$e^{\hat{b}} e^{\hat{c}} = e^{\hat{c} + \frac{1}{1!} [\hat{b}, \hat{c}] + \frac{1}{2!} [\hat{b}, [\hat{b}, \hat{c}]] + \dots}$$

12 - برهن أن التوابع الخاصة لمؤثر كمية الحركة $\hat{p} = -i\hbar \nabla$ هي من الشكل :

$$\psi(\vec{r}) = A e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}$$

احسب الثابت A في الحالة الخاصة عندما تكون الحركة ذات بعد

واحد ثم عم ذلك عندما تحدث الحركة في ثلاثة أبعاد .

13 - توءلف المتجهات الخاصة ψ_i (التوابع الخاصة) أساساً تاماً أي أنها تحقق العلاقات :

$$\hat{A} \psi_i = a_i \psi_i : (\forall a_i \in \mathbb{C})$$

$$\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \int \psi_i^* \psi_j dx = \delta_{ij}$$

آ - برهن أن ψ_i هو متجه خاص للمؤثر \hat{A}^+ مقابل للقيمة a_i^* .
 ب - احسب المبدل $[\hat{A}, \hat{A}^+]$.

ج - اذا قسمنا المؤثر \hat{A} الى قسمين : هرميتي وغير هرميتي طبقاً للعلاقة : $\hat{A} = \hat{P} + i\hat{Q}$ فاحسب المبدل $[\hat{P}, \hat{Q}]$.

14 - أوجد المؤثر الذي يحول التابع $\psi(x)$ الى $\psi(x+a)$ ثم ادرس

هرميتية هذا المؤثر .

15- عندما يتحرك جسيم كتلته m وشحنه q في حقل مغناطيسي \vec{B} يشتق من كمون \vec{A} فان اندفاعه \vec{P} يعطى بالعلاقة :

$$\vec{P} = m\vec{V} = \vec{P} - q\vec{A}$$

فاذا فرضنا أن $\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z$ هي مركبات مؤثر السرعة على المحاور الاحداثية فيطلب ما يلي :

أ - برهن أن المؤثرات $\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z$ هي مؤثرات هرميتية

ب - احسب المبدل $[\hat{V}_x, \hat{V}_y]$ في الحالة الخاصة عندما يتجه \vec{B} باتجاه المحور z .

16- ليكن \hat{U} مؤثراً واحدياً . برهن أن المؤثر \hat{P} المعطى بالعلاقة :

$$\hat{P} = i \frac{\hat{U} - 1}{\hat{U} + 1}$$

لابد أن يكون هرميتياً .

17- اذا كان \hat{A} مؤثراً هرميتياً فبرهن أن $(d\hat{A}/dt)$ هو مؤثر هرميتي أيضاً .

18- اذا كان $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ فبرهن أن المؤثر $e^{i\hat{A}}$ هو مؤثر واحدي .

19- اذا كان \hat{A} مؤثراً هرميتياً فبرهن أن المؤثر \hat{P} التالي :

$$\hat{P} = \frac{1 - i\hat{A}}{1 + i\hat{A}}$$

هو هرميتي أيضاً .

20- اذا كان $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$ و $[\hat{A}, \hat{C}] = 0$ فبرهن أن :

$$[F(\hat{A}), \hat{B}] = \hat{C} \frac{dF(\hat{A})}{d\hat{A}}$$

11- أثبت أن $e^{\hat{A}} e^{-\hat{A}} = 1$ حيث \hat{A} مؤثراً .

12- ليكن \hat{R}, \hat{F} مؤثرين خطيين هرميتيين . لناخذ المؤثرين

$$\hat{S} = \frac{1}{2} (\hat{R}\hat{F} + \hat{F}\hat{R}) , \hat{G} = i(\hat{R}\hat{F} - \hat{F}\hat{R})$$

$$\langle \hat{F}^2 \rangle \langle \hat{R}^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle \hat{G}^2 \rangle + \langle \hat{S}^2 \rangle \quad \text{برهن أن :}$$

٢٣ - ليكن \hat{A} مؤثرًا اختياريًا ، \hat{A}^+ مرافقه الزائدي . وليكن المؤثر \hat{H} المعروف بالعلاقة

أ - القيمة الوسطى لـ \hat{H} موجبة دومًا .

ب - \hat{H} هرميتي .

ج - القيم الخاصة لـ \hat{H} أعداد موجبة .

د - تحقق من صحة العلاقة :

$$|\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle|^2 \leq \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle$$

وذلك مهما كان كل من التابعين ψ و ψ .

٢٤ - احسب مربع المؤثر $\frac{d}{dx} + \hat{x}$ ومكعب المؤثر $\frac{d}{dx} + \frac{1}{\hat{x}}$.

٢٥ - احسب المؤثر الذي يحول التابع $\psi(\psi)$ الى $\psi(\psi + \alpha)$.

(متحول زاوي)

٢٦ - احسب المؤثر المرافق للمؤثر $e^{i\alpha \frac{d}{d\psi}}$ واستنتج فيما اذا كان

هذا المؤثر هرميتيًا .

٢٦ - برهن أن مؤثر الجداء يتابع حقيقي هو مؤثر هرميتي .

٢٨ - احسب جداء المؤثرين $\hat{L} + \hat{M}$ و $\hat{L} - \hat{M}$.

٢٩ - احسب التوابع الخاصة والقيم الخاصة للمؤثرين : $i \frac{d}{dx}$ ، $\frac{d}{dx}$.

٣٥ - أعد السوءال نفسه من أجل المؤثرات التالية :

$$e^{i\alpha \frac{d}{d\psi}} , \cos i \frac{d}{d\psi} , \sin \frac{d}{d\psi}$$

$$\frac{d}{d\psi} , x + \frac{d}{dx} , \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx}$$

٣٤ - برهن صحة مطابقة جاكوبي التالية :

$$[[\hat{p}, \hat{q}], \hat{r}] + [[\hat{q}, \hat{r}], \hat{p}] + [[\hat{r}, \hat{p}], \hat{q}] = 0$$

٣٤ - ليكن المؤثران \hat{C}^+ ، \hat{C} اللذان يحققان العلاقتين :

$$\hat{C}\hat{C} = 0, \quad \hat{C}\hat{C}^\dagger + \hat{C}^\dagger\hat{C} = \hat{1}$$

ولنعرف الموءثرات :

$$\hat{C}_1 = \frac{\hat{C} + \hat{C}^\dagger}{2}, \quad \hat{C}_2 = \frac{\hat{C}^\dagger - \hat{C}}{2}, \quad \hat{C}_3 = \frac{\hat{C}^\dagger\hat{C} - \hat{C}\hat{C}^\dagger}{2}$$

والمطلوب حساب المبدلات :

$$[\hat{C}_i, \hat{C}_j] : (i, j = 1, 2, 3).$$

33- لتكن الموءثرات المعروفة بالعلاقات :

$$\hat{P} : \hat{P}\psi(x) = \psi(-x) \quad (\text{موءثر الانعكاس})$$

$$\hat{T}_a : \hat{T}_a\psi(x) = \psi(x+a) \quad (\text{موءثر الانسحاب})$$

$$\hat{K} : \hat{K}\psi(x) = \psi^*(x) \quad (\text{الموءثر التخيلي أو العقدي})$$

آ- هل هذه الموءثرات خطيه .

ب- أحسب الموءثرات المرافقة لها ثم المعاكسة لها .

34- ليكن \hat{L} موءثراً خطياً . يطلب البرهان على صحة ما يلي :

$$(\hat{L}^\dagger)^\dagger = \hat{L} \quad \text{آ}$$

ب- الموءثران $\hat{L}\hat{L}^\dagger$ و $\hat{L}^\dagger\hat{L}$ هرميتيان .

ج- الموءثران $\hat{L} + \hat{L}^\dagger$ و $i(\hat{L} - \hat{L}^\dagger)$ هرميتيان أيضاً .

35- إذا كان الموءثران \hat{A} و \hat{B} خطيين وهرميتين فبرهن

هرميتية الموءثرين :

$$\hat{C} = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}), \quad \hat{D} = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}).$$

36- إذا كان الموءثران \hat{A} و \hat{B} لاتبادليين فبرهن أن :

$$(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})^2 = \hat{A}^{-1}\hat{B}^2\hat{A}, \quad (\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})^n = \hat{A}^{-1}\hat{B}^n\hat{A}.$$

37- برهن أنه يمكن كتابة أي موءثر اختياري \hat{F} بالشكل :

$$\hat{F} = \hat{A} + i\hat{B}$$

حيث \hat{A} و \hat{B} موءثرين هرميتيين .

38- الموءثر \hat{F} غير هرميتي . ما هو الشرط اللازم ، تحققه لكي يكون الموءثر \hat{F}^2 هرميتياً ؟

39- برهن صحة الخاصة التوزيعية في جبر الموءثرات ، أي أن :

$$[\sum_i \hat{A}_i, \sum_k \hat{B}_k] = \sum_{i,k} [\hat{A}_i, \hat{B}_k].$$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

40- برهن أن التابع :

هو تابع خاص للموءثر $\frac{d^2}{dx^2} - x^2$ ثم احسب القيم الخاصة
المقابلة .



$$F = m v' = \dot{p} \Rightarrow r \wedge F = r \wedge m v' = r \wedge \dot{p} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} [r \wedge m v'] = \frac{d}{dt} [r \wedge \dot{p}] \Rightarrow \frac{d}{dt} [r \wedge m v']$$

الفصل الرابع

$$= m [\dot{r} \wedge v] + m [r \wedge \dot{v}] \\ = m [\dot{r} \wedge v] + m [r \wedge \dot{v}] = [r \wedge m v']$$

$$\frac{d}{dt} [r \wedge m v] = [r \wedge F]$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} [r \wedge p] = [r \wedge F]$$

العزم الحركي

يسمى $r \wedge p$ العزم الزاوي

٢٨ - تعريف العزم الحركي ، حساب المركبات في الاحداثيات الديكارتية والكروية :

آ - يعرف العزم الحركي (عزم كمية الحركة ، عزم الاندفاع ، العزم الزاوي) لجسيم في الميكانيك الكلاسيكي بالعلاقة :

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

وطبقاً للفرضية الاولى فان هذا المقدار يصبح مؤثراً في ميكانيك الكم ويوضع بالشكل التالي :

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} = \frac{h}{i} \hat{r} \times \hat{\nabla}$$

(4.1)

ان مركبات هذا المؤثر على المحاور الديكارتية هي :

$$\hat{L}_x = \hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y, \hat{L}_y = \hat{z} \hat{p}_x - \hat{x} \hat{p}_z, \hat{L}_z = \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x \quad (4.2a)$$

أو بالشكل :

$$\hat{L}_x = \frac{h}{i} (y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}), \hat{L}_y = \frac{h}{i} (z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}), \hat{L}_z = \frac{h}{i} (x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}) \quad (4.2b)$$

لنبرهن أولاً هرميتية هذا المؤثر ولهذا نبرهن هرميتية مركباته
(ونكتفي بـ \hat{L}_x)

$$\begin{aligned}\hat{L}_x^+ &= (\hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y)^+ = (\hat{y} \hat{p}_z)^+ - (\hat{z} \hat{p}_y)^+ = \hat{p}_z^+ \hat{y}^+ - \hat{p}_y^+ \hat{z}^+ \\ &= \hat{p}_z \hat{y} - \hat{p}_y \hat{z} = \hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y = \hat{L}_x\end{aligned}$$

وقد استندنا في هذا البرهان على أن المبدلين $[\hat{y}, \hat{p}_z]$ و $[\hat{z}, \hat{p}_y]$ معدومان أي أن $\hat{y} \hat{p}_z = \hat{p}_z \hat{y}$ و $\hat{z} \hat{p}_y = \hat{p}_y \hat{z}$ وبالطريقة نفسها نبرهن هرميتية بقية المركبات .

لنحسب مركبات \hat{L} في الاحداثيات الكروية ولهذا يجب تحويل المشتقات بالنسبة إلى x و y و z إلى مشتقات بالنسبة إلى r و θ و ϕ انطلاقاً من العلاقات التالية بين الاحداثيات الديكارتية والكروية :

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

مع العلم أن :

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \phi} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \phi}\end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

حيث ψ أي تابع للاحداثيات (x, y, z) .
وإذا أجرينا الاشتقاق وفرضنا $\rho = r \sin \theta$ ولاحظنا أن $\rho^2 = x^2 + y^2$ فاننا نجد :

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \frac{xz}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{yz}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \phi} &= -y \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial \psi}{\partial y}\end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

وبضرب طرفي العلاقة الأخيرة $\frac{\hbar}{i}$ نجد مباشرة المركبة \hat{L}_z

وهي :

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} (x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (4.5)$$

ولحساب \hat{L}_y نضرب المعادلة الأولى من (4.4) بـ x/m والثانية بـ $-y/m$ ثم نجمع العلاقتين الناتجتين طرفاً الى طرف فنجد أخيراً :

$$x \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial \psi}{\partial y} = \cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

وينتج مباشرة المؤثر \hat{L}_y بضرب طرفي العلاقة السابقة بـ $\frac{\hbar}{i}$ حيث نجد :

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i} (\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}) \quad (4.6)$$

وأخيراً لحساب \hat{L}_x نضرب المعادلة الأولى من (4.4) بـ $-y/m$ والثانية بـ x/m ثم نجمع طرفاً الى طرف فنجد أخيراً عبارة \hat{L}_x (بعد الضرب بـ $\frac{\hbar}{i}$) التالية :

$$\hat{L}_x = -\frac{\hbar}{i} (\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}) \quad (4.7)$$

ب - نعرف المؤثرين \hat{L}_+ ، \hat{L}_- اللذين يلعبان دوراً كبيراً في دراسة العزم الحركي بالعلاقتين :

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i \hat{L}_y \quad , \quad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i \hat{L}_y \quad (4.8)$$

ومن المفيد حسابهما في الاحداثيات الكروية ولهذا نجد مباشرة طبقاً للعلاقتين :

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}_+ &= \hbar e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \hat{L}_- &= \hbar e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

مع العلم أنه يمكن توحيدهما بعلاقة واحدة هي :

$$\hat{L}_{\pm} = \hbar e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

(4.10)

وإذا استعضنا عن θ بمتحول جديد $x = \cos \theta$ فإن العلاقة السابقة
توضع بالشكل :

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i \hat{L}_y = \hbar e^{\pm i\varphi} \left(\frac{\pm x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial}{\partial x} \mp \sqrt{1-x^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (4.11)$$

ومن المفيد حساب الموترين $\hat{L}_+ \hat{L}_-$ و $\hat{L}_- \hat{L}_+$ بدلالة الموترين \hat{L}_x^2 و \hat{L}_y^2

حيث نجد :

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}_+ \hat{L}_- &= (\hat{L}_x + i \hat{L}_y)(\hat{L}_x - i \hat{L}_y) = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + i [\hat{L}_y, \hat{L}_x] \\ \hat{L}_- \hat{L}_+ &= (\hat{L}_x - i \hat{L}_y)(\hat{L}_x + i \hat{L}_y) = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + i [\hat{L}_x, \hat{L}_y] \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

وبالجمع نجد :

$$\hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+ = 2(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2)$$

أما الموتر \hat{L}^2 فيساوي :

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \frac{1}{2} (\hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+) + \hat{L}_z^2 \quad (4.13)$$

29 - المبدلات الأساسية :

أ - لنحسب أولاً المبدلات من النوع $[\hat{L}_i, \hat{r}_j]$ حيث i, j تأخذ
الأدلة 1, 2, 3 الموافقة للمركبات x, y, z على الترتيب، وسنبدأ
بالمبدل $[\hat{L}_x, \hat{x}]$

$$[\hat{L}_x, \hat{x}] = [\hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y, \hat{x}]$$

وطبقاً لـ (3.11) يكون :

$$[\hat{L}_x, \hat{x}] = \hat{y} [\hat{p}_z, \hat{x}] + [\hat{y}, \hat{x}] \hat{p}_z - \hat{z} [\hat{p}_y, \hat{x}] - [\hat{z}, \hat{x}] \hat{p}_y = 0$$

أي أن :

$$[\hat{L}_x, \hat{x}] = 0$$

وإذا حسبنا $[\hat{L}_x, \hat{y}]$ و $[\hat{L}_x, \hat{z}]$ فأننا نجد بالطريقة نفسها :

$$[\hat{L}_x, \hat{y}] = i\hbar \hat{z}, \quad [\hat{L}_x, \hat{z}] = -i\hbar \hat{y}$$

ويمكن تعميم ذلك على كل المبدلات في النوع $[\hat{L}_i, \hat{p}_j]$ حيث نجد :

$$[\hat{L}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \hat{p}_k \quad (4.14)$$

حيث يعرف التنسور δ_{ijk} بالعلاقة :

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{إذا أخذنا الأعداد } i, j, k \text{ بشكل دوري} \\ -1 & \text{إذا تغير ترتيب أي اثنين منها} \\ 0 & \text{إذا تساوى اثنان منها} \end{cases}$$

ب - يتم حساب المبدلات من النوع $[\hat{L}_i, \hat{p}_j]$ بالطريقة نفسها :
لنأخذ مثلاً المبدل $(i=j=1)$ ، $[\hat{L}_x, \hat{p}_x]$ فنجد :

$$[\hat{L}_x, \hat{p}_x] = [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{p}_x] = \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{p}_x] + [\hat{y}, \hat{p}_x]\hat{p}_z - \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{p}_x] - [\hat{z}, \hat{p}_x]\hat{p}_y = 0$$

أما إذا حسبنا المبدل $(i=1, j=2)$: $[\hat{L}_x, \hat{p}_y]$ فأننا نجد :

$$[\hat{L}_x, \hat{p}_y] = \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{p}_y] + [\hat{y}, \hat{p}_y]\hat{p}_z - \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{p}_y] - [\hat{z}, \hat{p}_y]\hat{p}_x = i\hbar \hat{p}_x$$

وكذلك نحسب $(i=1, j=3)$: $[\hat{L}_x, \hat{p}_z]$ حيث نجد :

$$[\hat{L}_x, \hat{p}_z] = -i\hbar \hat{p}_y$$

ويمكن تعميم العلاقات الثلاث السابقة بالعلاقة :

$$[\hat{L}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ijk} \hat{p}_k \quad (4.15)$$

ج - من السهل حساب المبدلات من النوع $[\hat{L}_i, \hat{r}^2]$ و $[\hat{L}_i, \hat{p}^2]$ وذلك بتبديل كل من \hat{r}^2 و \hat{p}^2 و $\hat{r}\hat{p}$ بقيمها
و $[\hat{L}_i, \hat{r}^2]$ وذلك بتبديل كل من \hat{r}^2 و \hat{p}^2 و $\hat{r}\hat{p}$ بقيمها
ثم الاستفادة من العلاقة (3.11) حيث نجد :

$$[\hat{L}_i, \hat{r}^2] = [\hat{L}_i, \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2] = [\hat{L}_i, \hat{x}^2] + [\hat{L}_i, \hat{y}^2] + [\hat{L}_i, \hat{z}^2] = 0 \quad (4.16)$$

$$[\hat{L}_i, \hat{p}^2] = [\hat{L}_i, \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2] = [\hat{L}_i, \hat{p}_x^2] + [\hat{L}_i, \hat{p}_y^2] + [\hat{L}_i, \hat{p}_z^2] = 0 \quad (4.17)$$

$$[\hat{L}_i, \hat{r}\hat{p}] = [\hat{L}_i, \hat{x}\hat{p}_x + \hat{y}\hat{p}_y + \hat{z}\hat{p}_z] = [\hat{L}_i, \hat{x}\hat{p}_x] + [\hat{L}_i, \hat{y}\hat{p}_y] + [\hat{L}_i, \hat{z}\hat{p}_z] = 0 \quad (4.18)$$

كما يمكن البرهان أن \hat{L}^2 يتبادل مع كل من مركباته أي أن :

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \hat{L}_i] = 0$$

(4.19)

د - أما حساب المبدلات $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$ فيتم كما يلي :
نحسب أولاً : $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] : (i=1, j=2)$ فنجد :

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= [\hat{L}_x, \hat{L}_x \hat{p}_y - \hat{p}_x \hat{L}_y] = [\hat{L}_x, \hat{L}_x \hat{p}_y] - [\hat{L}_x, \hat{p}_x \hat{L}_y] = \\ &= [\hat{L}_x, \hat{L}_x] \hat{p}_y + \hat{L}_x [\hat{L}_x, \hat{p}_y] - [\hat{L}_x, \hat{p}_x] \hat{L}_y - \hat{p}_x [\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \\ &= -i\hbar \hat{p}_y + i\hbar \hat{p}_x = i\hbar (\hat{p}_x \hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{p}_x) = i\hbar \hat{L}_z \end{aligned}$$

وبتعميم العلاقة السابقة يكون :

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \delta_{ij} \hat{L}_k$$

(4.20a)

او بالشكل :

$$\hat{L} \times \hat{L} = i\hbar \hat{L}$$

(4.20b)

ومن السهل الآن التأكد من صحة (4.19) ؛ لنبرهن مثلاً أن المبدل $[\hat{L}^2, \hat{L}_x]$ يساوي الصفر ولهذا نكتب :

$$\begin{aligned} [\hat{L}^2, \hat{L}_x] &= [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}_x^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z^2, \hat{L}_x] = \\ &= \hat{L}_x [\hat{L}_y, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y, \hat{L}_x] \hat{L}_y + \hat{L}_x [\hat{L}_z, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z, \hat{L}_x] \hat{L}_z = 0 \end{aligned}$$

ه - من المفيد عند حساب القيم الخاصة لمؤثر العزم الحركي أن نعرف المبدلات $[\hat{L}_\pm, \hat{L}_\pm]$ و $[\hat{L}_\pm, \hat{L}_\mp]$ ولهذا نحسبهما الآن :

$$\begin{aligned} [\hat{L}_\pm, \hat{L}_\pm] &= [\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y, \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y] = [\hat{L}_x, \hat{L}_x] \pm i[\hat{L}_y, \hat{L}_x] \pm i[\hat{L}_x, \hat{L}_y] + [\hat{L}_y, \hat{L}_y] \\ &= -i\hbar \hat{L}_y \pm i(i\hbar \hat{L}_x) = \mp \hbar \hat{L}_x - i\hbar \hat{L}_y = \mp \hbar (\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y) \end{aligned}$$

أي أن :

(4.21)

$$[\hat{L}_\pm, \hat{L}_\mp] = \mp \hbar \hat{L}_\pm$$

أما المبدل $[\hat{L}_+, \hat{L}_-]$ فيساوي :

(4.22)

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = [\hat{L}_x + i\hat{L}_y, \hat{L}_x - i\hat{L}_y] = 2\hbar \hat{L}_z$$

و - لندرس أخيراً تبادل العزم الحركي مع مؤثر هاميلتون ،
ولهذا نفرض جسماً كتلته m واندفاعه \hat{p} يتحرك في حقل كمون
من الشكل $V(x, y, z)$ فيكون مؤثر هاميلتون له :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x, y, z)$$

أما المبادل $[\hat{L}, \hat{H}]$ فيحسب كما يلي :

$$[\hat{L}, \hat{H}] = [\hat{L}, \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}] = \frac{1}{2m} [\hat{L}, \hat{p}^2] + [\hat{L}, \hat{V}] = [\hat{L}, \hat{V}]$$

مع العلم أننا استفدنا من تبادل \hat{L} مع \hat{p}^2 طبقاً لـ (4.17).
ولحساب $[\hat{L}, \hat{V}]$ نكتبه بالشكل :

$$[\hat{L}, \hat{V}] = [\hat{L}_x, \hat{V}] \hat{i} + [\hat{L}_y, \hat{V}] \hat{j} + [\hat{L}_z, \hat{V}] \hat{k}$$

لنحسب $[\hat{L}_x, \hat{V}]$ فنجد :

$$[\hat{L}_x, \hat{V}] = [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{V}] = \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{V}] - \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{V}] = -\hat{y} \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \hat{V}}{\partial z}$$

ومنـه :

$$[\hat{L}_x, \hat{V}] = \hat{y} \hat{F}_z - \hat{z} \hat{F}_y = \hat{M}_x$$

وكذلك نجد :

$$[\hat{L}_y, \hat{V}] = \hat{M}_y, \quad [\hat{L}_z, \hat{V}] = \hat{M}_z$$

$$[\hat{L}, \hat{V}] = -\hat{r} \times \nabla \hat{V} = \hat{M}$$

أي أن :

$$(4.23)$$

حيث \hat{M} مؤثر عزم القوى الخارجية المؤثرة على الجسم المقابل
للعزم الكلاسيكي M ، ويبدو بوضوح أنه إذا كان حقل القوى الذي
يتحرك فيه الجسم ذا تناظر مركزي فإن $[\hat{L}, \hat{V}] = 0$ وبالتالي فإن
 $[\hat{L}, \hat{H}] = 0$ ويكون \hat{L} تكاملاً للحركة من وجهة نظر كلاسيكية . أما
من وجهة نظر كوانتية فإن تبادل المؤثرين \hat{L} و \hat{H} يعني إمكانية
وجود تابع خاص مشترك لهما (انظر الفصل الثالث) . فإذا علمنا
أن \hat{H} يتبادل مع \hat{L}^2 في هذه الحالة ويتبادل أيضاً مع \hat{L}_z نستنتج
عندئذ أنه لابد من وجود تابع خاص مشترك للمؤثرات \hat{H} ، \hat{L}^2 ، \hat{L}_z ،

وسنبحث عن هذا التابع في الفصل التالي عند دراسة الحركة في حقل مركزي متناظر .

30 - طريقة ثانية لحساب مركبات العزم الحركي :

من المعلوم أن اختيار المحاور الاحداثية لا يؤثر مطلقاً على الحالة الفيزيائية للجملة ولا على تنظيم التابع الموجي الذي يصفها ، ولهذا فإن دوران المحاور الاحداثية يجب أن يقابله تحويل واحد . لنحسب أولاً المؤثر المقابل لهذا التحويل ولهذا نأخذ التابع $\psi(x, y, z)$ الذي يصبح بعد الدوران $\psi'(x, y, z)$ ، وإذا فرضنا أن الدوران يتم حول z بزاوية φ فإن تحويل الاحداثيات يكون بالشكل التالي :

$$x \rightarrow x \cos \varphi - y \sin \varphi , y \rightarrow x \sin \varphi + y \cos \varphi , z \rightarrow z$$

أما إذا تم الدوران بزاوية عنصرية $d\varphi$ فإن التابع ψ يتحول التابع ψ' بحيث يكون :

$$\begin{aligned} \psi' &= \psi(x - y d\varphi, x d\varphi + y, z) = \\ &= \psi(x, y, z) + \frac{\partial \psi}{\partial x} (-y d\varphi) + \frac{\partial \psi}{\partial y} (x d\varphi) = \left[1 + (x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}) d\varphi \right] \psi \end{aligned}$$

وحسب تعريف العزم الحركي يكون :

$$x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} \hat{L}_z$$

أي أن :

$$\psi' = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \hat{L}_z d\varphi \right) \psi = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{L}_z d\varphi} \psi \quad (4.24)$$

ومن الواضح أنه إذا دارت الجملة الاحداثية (x, y, z) بزاوية φ فإننا نجد :

$$\psi'(x, y, z) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{L}_z \varphi} \psi(x, y, z) = \hat{U}^+ \psi \quad (4.25)$$

فالمؤثر الواحد المقابل لهذا التحويل الدوراني هو :

$$\hat{U}^+ = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{L}_z \varphi}$$

لنحسب المؤثر \hat{L}_z بالاحداثيات الكروية ولهذا نفرض أن ψ تابع

لـ (٢١٥،١٢) ونستخدم العلاقات (٤.٣) . فإذا تم الدوران حول المحور z بزاوية عنصرية $\delta\alpha$ فإن θ لن تتغير ، أما ψ فتصبح $\psi + \delta\alpha$ وهكذا يتحول ψ الى الشكل ψ' التالي :

$$\psi' = \psi(r, \theta, \psi + \delta\alpha) = \psi + \delta\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \psi} = (1 + \delta\alpha \frac{\partial}{\partial \psi}) \psi \quad (4.27)$$

فإذا قارنا العلاقة الأخيرة مع (٤.٢٤) بعد ملاحظة أن الدوران هنا بزاوية $\delta\alpha$ فإننا نجد :

$$\frac{i}{\hbar} \hat{L}_z = \frac{\partial}{\partial \psi} \Rightarrow \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \psi} \quad (4.28)$$

وهي النتيجة نفسها التي توصلنا اليها سابقاً والمعبر عنها بالعلاقة (٤.٢٥) . لنحسب الآن كلاً من \hat{L}_x و \hat{L}_y ولهذا نفرض دوراناً بزاوية $\delta\alpha$ حول المحور z يتحول فيه التابع ψ الى ψ' مع ملاحظة أن كلاً من ψ و θ تتغير في هذا الدوران ويكون :

$$\psi' = \psi(r, \theta + d\theta, \psi + d\psi) = \psi(r, \theta, \psi) + \delta\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) \quad (4.29)$$

وبما أن الدوران يتم حول z فإن المقدار السابق يجب أن يساوي (قياساً بـ ٤.٢٤) :

$$\psi' = (1 + \frac{i}{\hbar} \hat{L}_x \delta\alpha) \psi \quad (4.30)$$

ولكي يتم الحصول على العبارة الصريحة لـ \hat{L}_x يجب حساب المقدار ما بين القوسين في الطرف الأيمن من (٤.٢٩) ومقارنة ذلك مع (٤.٣٥) . نلاحظ أولاً أن الدوران حول z لا يغير من الاحداثيات x ولكن y و z تتغيران طبقاً للعلاقة :

$$y' = y - z d\alpha, \quad z' = z + y d\alpha \quad (4.31)$$

نعوض عن y و z بقيمتيهما من علاقات التحويل بين الاحداثيات الديكارتية والكروية وعن y' و z' بقيمتيهما الناتجتين عن زيادة كل من θ بمقدار $d\theta$ و ψ بمقدار $d\psi$ وهكذا نجد :

$$y' = r \sin(\theta + d\theta) \sin(\psi + d\psi) = r \sin\theta \sin\psi - r \cos\theta d\alpha \quad (4.32)$$

ميكانيك الكم ١-٢

$$z' = r \cos(\theta + d\theta) = r \cos \theta + r \sin \theta \sin \varphi d\alpha \quad (4.33)$$

وبفك الأقواس في الطرف الأيسر والمقارنة مع الطرف الأيمن نجد

$$r \cos \theta - r \sin \theta d\theta = r \cos \theta + r \sin \theta \sin \varphi d\alpha \quad (4.33)$$

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = -\sin \varphi \quad \text{ومنـــــــــه :} \quad (4.34)$$

وبنتج من (4.32) :

$$(r \sin \theta + r \cos \theta d\theta)(\sin \varphi + \cos \varphi d\varphi) = r \sin \theta \sin \varphi - r \cos \theta d\alpha$$

$$\sin \varphi \cos \theta d\theta + \cos \varphi \sin \theta d\varphi = -\cos \theta d\alpha \quad \text{ومنـــــــــه :}$$

$$\sin \varphi \cos \theta \frac{d\theta}{d\alpha} + \cos \varphi \sin \theta \frac{d\varphi}{d\alpha} = -\cos \theta \quad (4.35)$$

فاذا عوضنا $d\theta/d\alpha$ بقيمتها المحسوبة من (4.34) فإننا نجد قيمة $d\varphi/d\alpha$ التالية :

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = -\cot \theta \sin \varphi \quad (4.36)$$

نعوض أخيراً قيمتي $d\theta/d\alpha$ و $d\varphi/d\alpha$ المحسوبتين من (4.34) و (4.36) في (4.30) ونقارن النتيجة مع (4.30) فنحصل على المعادلة التالية :

$$(1 + \frac{i}{\hbar} \hat{L}_x \delta \alpha) \psi = [1 + \delta \alpha (-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi})] \psi$$

ومنـــــــــه نجد عبارة \hat{L}_x التالية :

$$\hat{L}_x = -\frac{\hbar}{i} (\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}) \quad (4.37)$$

وأخيراً لحساب \hat{L}_y نأخذ دوراناً حول المحور y بزاوية $\delta \alpha$ يتغير فيه كل من φ و θ ونتبع الطريقة السابقة نفسها فنصل إلى ما يلي :

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i} \left(\sin \psi \frac{\partial}{\partial \phi} - \cos \psi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (4.38)$$

وهي النتائج نفسها التي حصلنا عليها في القسم الأول من هذا الفصل.

لنحسب \hat{L}^2 استناداً إلى العلاقات السابقة ولهذا نلاحظ أولاً أن :

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

فإذا بدلنا $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2$ بقيمتها من (4.12) بعد تعويض $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ بقيمتها من (4.20a) فإننا نجد :

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 - \hbar \hat{L}_z \quad (4.39)$$

وكذلك نجد :

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_- \hat{L}_+ + \hat{L}_+ \hat{L}_- + \hbar \hat{L}_z \quad (4.40)$$

وليس من الصعب الآن التعبير عن \hat{L}^2 في الاحداثيات بعد تعويض كل من $\hat{L}_+ \hat{L}_-$ (أو $\hat{L}_- \hat{L}_+$) و \hat{L}_x^2 و \hat{L}_y^2 بقيمتها انطلاقاً من (4.5) و (4.10) حيث نحصل أخيراً على المؤثر \hat{L}^2 بالاحداثيات الكروية :

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \quad (4.41)$$

3- حساب القيم الخاصة لمؤثر العزم الحركي :

لنبرهن أولاً أن متوسط مربع أي مؤثر هرميتي يجب أن يكون موجباً ، ولنأخذ على سبيل المثال المؤثر \hat{L}^2 (مربع العزم الحركي)

لدينا :

$$\hat{L} \psi = \lambda \psi \Rightarrow \hat{L}^2 \psi = \hat{L} \lambda \psi = \lambda \hat{L} \psi = \lambda^2 \psi$$

وهكذا تكون λ^2 هي القيمة الخاصة للمؤثر \hat{L}^2 ، أما متوسط \hat{L}^2

فيساوي :

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}^2 \rangle &= \int \psi^* \hat{L}^2 \psi dx = \int \psi^* \hat{L} \hat{L} \psi dx = \int \psi^* \hat{L} \lambda \psi dx = \\ &= \int \lambda \psi^* \hat{L} \psi dx = \lambda \int \psi^* \hat{L} \psi dx = \lambda \int \psi^* \lambda \psi dx = \lambda^2 \int \psi^* \psi dx = \lambda^2 \int |\psi|^2 dx = \lambda^2 \|\psi\|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

ومن جهة ثانية لدينا :

$$\langle \hat{L}^2 \rangle = \int \psi^* \hat{L}^2 \psi dx = \lambda^2 \int \psi^* \psi dx = \lambda^2$$

$$\langle \hat{L}^2 \rangle = \lambda^2 = \|\psi\|^2 \quad \text{أي أن :}$$

(4.43)

لحساب القيم الخاصة والتوابع الخاصة للمؤثر \hat{L}^2 نلاحظ أولاً أن مركباته لا تتبادل فيما بينها وبالتالي لا يمكن اختيارها تابع خاص مشترك لها جميعاً .

وبما أن \hat{L}^2 تتبادل مع كل من مركبات \hat{L} فيمكن اختيار تابع خاص مشترك \hat{L}^2 وأحد مركباته ، وليكن \hat{L}_z (مع العلم أن اختيارنا \hat{L}_x لا يبنى على أساس وكان من الممكن حساب التوابع الخاصة بحيث تكون مشتركة لكل من \hat{L}_x أو \hat{L}_y) .

نستخدم رموز ديراك ونرمز للتابع الخاص المشترك المطلوب حسابها بالرمز $|l, m\rangle \equiv \psi_{lm}$ وعندئذ يكون :

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}^2 |l, m\rangle &= \lambda^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle \\ \hat{L}_z |l, m\rangle &= \hbar m |l, m\rangle \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

حيث l و m هما ثابتان قيد التعيين . لنأخذ الآن المؤثرين \hat{L}_+ و \hat{L}_- حيث :

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y, \quad (\hat{L}_-)^+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y = \hat{L}_+$$

ولنحسب عنصر المصفوفة :

$$\begin{aligned} \langle l, m | \hat{L}_- \hat{L}_+ | l, m \rangle &= \int \psi_{lm}^* \hat{L}_- \hat{L}_+ \psi_{lm} dx = \\ &= \int \hat{L}_+ \psi_{lm} (\hat{L}_- \psi_{lm})^* dx = \int |\hat{L}_+ \psi_{lm}|^2 dx = \|\hat{L}_+ \psi_{lm}\|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

وبنفس الطريقة نجد :

(4.46)

$$\langle l, m | \hat{L}_+ \hat{L}_- | l, m \rangle = \|\hat{L}_- \psi_{lm}\|^2 \geq 0$$

فإذا عوضنا عن $\hat{L}_- \hat{L}_+$ و $\hat{L}_+ \hat{L}_-$ بقيمتيهما بدلالة \hat{L}^2 و \hat{L}_z طبقاً لـ (4.39) و (4.40) فإننا نجد العلاقتين التاليتين :

$$\langle l, m | \hat{L}_+ \hat{L}_- | l, m \rangle = \langle l, m | \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar \hat{L}_z | l, m \rangle = \hbar^2 [l(l+1) - m(m-1)] \langle l, m | l, m \rangle \quad (4.47a)$$

ومنه نجد طبقاً لـ (4.46) أن :

$$(l + \frac{1}{2})^2 \geq (m - \frac{1}{2})^2 \quad (4.48a)$$

وكذلك نجد :

$$\langle l, m | \hat{L}_- \hat{L}_+ | l, m \rangle = \langle l, m | \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar \hat{L}_z | l, m \rangle = \hbar^2 [l(l+1) - m(m+1)] \langle l, m | l, m \rangle \quad (4.47b)$$

وطبقاً لـ (4.45) تكون :

$$(l + \frac{1}{2})^2 \geq (m + \frac{1}{2})^2 \quad (4.48b)$$

أما من (4.48a) فنلاحظ أنها تعطي :

$$l^2 + l > m^2 - m \Rightarrow l \geq -m \Rightarrow m \leq -l \quad (4.49)$$

ومن (4.48b) و (4.49) نستنتج النتيجة الهامة التالية :

$$-l \leq m \leq +l \quad (4.50)$$

لنحسب الآن القيم الخاصة للمؤثرين \hat{L}_+ و \hat{L}_- انطلاقاً من العلاقات التبادلية التي يحققها هذين المؤثرين فنجد طبقاً لـ (4.21) :

$$\hat{L}_z \hat{L}_+ - \hat{L}_+ \hat{L}_z = \hbar \hat{L}_+ \quad (4.51)$$

فإذا استخدمنا العلاقة الثانية وأشرنا بطرفيها على التابع

$$\psi_{lm} \quad \text{فإننا نجد :}$$

$$\hat{L}_z \hat{L}_+ | l, m \rangle = \hat{L}_+ \hat{L}_z | l, m \rangle = \hbar L_- | l, m \rangle$$

ومنه :

$$\hat{L}_z \hat{L}_+ | l, m \rangle = \hbar m \hat{L}_+ | l, m \rangle - \hbar \hat{L}_+ | l, m \rangle = \hbar (m-1) \hat{L}_+ | l, m \rangle$$

وهذا يعني أنه عند تأثير \hat{L}_- على $|l, m\rangle$ فإنه يعطي قيمة خاصة أقل بواحد، ومن الطبيعي والحالة هذه أن نفرض أن $|l, m\rangle$ يتعلق بالتابع الخاص المقابل لهذه القيمة الخاصة أي :

$$\hat{L}_- |l, m\rangle = c |l, m-1\rangle \quad (4.52)$$

نفرض أن كلا $|l, m-1\rangle$ و $|l, m\rangle$ منظمين على الواحد .
أما إذا أثرنا بالمؤثر الأول من (4.51) على $|l, m\rangle$ فإننا نجد بالطريقة نفسها :

$$\hat{L}_+ |l, m\rangle = c' |l, m+1\rangle \quad (4.53)$$

ولحساب كل من c و c' نستفيد من العلاقات (4.45) و (4.46) و (4.47a) و (4.47b) حيث نجد :

$$\int (\hat{L}_- \psi_m)^* (\hat{L}_- \psi_m) dx = |c|^2 = \hbar^2 [l(l+1) - m(m-1)]$$

ومنه باختيار طور مناسب لـ c يجعل الطرف الأيمن موجبا يكون :

$$c = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \quad (4.54)$$

وبالطريقة نفسها نجد c' حيث نحصل على العلاقة :

$$c' = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \quad (4.55)$$

وبتبادل كل من c و c' بقيمتها من (4.54) و (4.55) ففي (4.52) و (4.53) على الترتيب نحصل على القيم الخاصة لكل من المؤثرين \hat{L}_- و \hat{L}_+ حيث نجد :

$$\hat{L}_- |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} |l, m-1\rangle \quad (4.56)$$

$$\hat{L}_+ |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} |l, m+1\rangle \quad (4.57)$$

أي أن \hat{L}_- بتأثيره على التابع $|l, m\rangle \equiv \psi_m$ ينقله إلى التابع الذي قبله بحيث تنتقل من m إلى $m-1$ ولكن ذلك لا يمكن أن يستمر

لأن m محدودة من الأدنى بـ $-l$ طبقاً لـ (4.55) وبالفعل نلاحظ من (4.56) أنه عندما $m = -l$ فإن $\hat{L}_- |l, -l\rangle = 0$. أما المؤثر \hat{L}_+ فهو ينقل التابع $|l, m\rangle$ إلى التابع $|l, m+1\rangle$ عند تأثيره عليه وبما أن m محدودة أيضاً من الأعلى فلا يمكن أن تستمر هذه الزيادة ولا بد أن ينعدم $\hat{L}_+ |l, m\rangle$ وهذا بالفعل ما يحصل عندما $m = l$ حيث نجد مباشرة من (4.56) أن $\hat{L}_+ |l, l\rangle = 0$ وهكذا نستنتج أن m يمكن أن تأخذ القيم التالية :

$$m = -l, -l+1, \dots, 0, 1, 2, \dots, l \quad (4.58)$$

التي عددها ($2l+1$) قيمة وحتى يكون هذا العدد صحيحاً يجب أن يكون l صحيحاً أو نصف صحيح أي أن l يمكن أن يأخذ القيم التالية :

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (4.59)$$

مع العلم أنه يقابل كل قيمة لـ l عدد من القيم نأخذها مساوية لـ m تساوي ($2l+1$) قيمة . فمثلاً عندما تأخذ l القيمة صفر فإن m تأخذ القيمة صفر أيضاً وتسمى الحالة الكوانتية عندئذ بالحالة s ، أما إذا كان $l = 1$ فإن m يمكن أن يأخذ القيم $-1, 0, +1$ وتسمى هذه الحالة والحالة p ... وهكذا ... وتكون التسمية طبقاً للجدول التالي :

$$\left. \begin{array}{cccccc} l = & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \text{الحالة (State)} : & s & p & d & f & g \dots \end{array} \right\} \quad (4.60)$$

3- التوابع الخاصة لمؤثر العزم الحركي ، المتوافقات الكروية :

أ - لنحسب أولاً التابع الخاص Φ المقابل للمؤثر \hat{L}_z انطلاقاً من تعريفه (4.5) فنجد :

$$\hat{L}_z \Phi = \hbar m \Phi \Rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{d\Phi}{d\varphi} = \hbar m \Phi \quad (4.61)$$

ومنـه :

$$\frac{d\Phi}{d\psi} = im d\psi \Rightarrow \Phi(\psi) = c e^{im\psi}$$

ومن الواضح أن التابع Φ يجب أن يكون دورياً ولهذا لابد أن يأخذ التعيين نفسه عندما تزداد ψ بمقدار 2π أي أن :

$$e^{im(\psi+2\pi)} = e^{im\psi} \Rightarrow e^{im2\pi} = 1$$

ولكي تتحقق العلاقة الأخيرة نفسها يجب أن يكون m عدداً صحيحاً موجباً أو سالباً ($m \in \mathbb{Z}$) وهي النتيجة نفسها (4.58) التي توصلنا إليها بطريقة ثانية .
لحساب c - نستفيد من شرط التنظيم :

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = 1 \Rightarrow c^2 \int_0^{2\pi} d\psi = 1 \Rightarrow c = 1/\sqrt{2\pi}$$

أي أن التابع الخاص المنظم للمؤثر \hat{L}_z هو التالي :

$$\Phi(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\psi} \quad (4.62)$$

ب - لنبحث عن التابع الخاص المتعلق ب θ ولهذا ننطلق من (4.66) فنضعها بالشكل :

$$\hat{L}_- |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} |l, m-1\rangle = \hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)} |l, m-1\rangle$$

فاذا وضعنا $m=l$ فإننا نجد من العلاقة السابقة :

$$\hat{L}_- |l, l\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - l(l-1)} |l, l-1\rangle = \hbar \sqrt{2l} |l, l-1\rangle \quad (4.63)$$

وبالطريقة نفسها نجد :

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}_- |l, l-1\rangle &= \hbar \sqrt{(2l-1)l} |l, l-2\rangle \\ \hat{L}_- |l, l-2\rangle &= \hbar \sqrt{(2l-2)(l-1)} |l, l-3\rangle \end{aligned} \right\} \quad (4.64)$$

فاذا أشرنا عدة مرات ب \hat{L}_- على طرفي العلاقات السابقة فإننا نجد أخيراً دون صعوبة :

$$(\hat{L}_-)^k |l, l\rangle = \sqrt{\frac{k! 2l!}{(2l-k)!}} |l, l-k\rangle \quad (4.65)$$

وإذا فرضنا $l-k=m$ (عندما $k=0$ يكون $l=m$) فإننا نحصل على عبارة $|l, m\rangle \equiv \psi_{lm}$ التالية :

$$\psi_{lm} \equiv |l, m\rangle = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)! 2l!}} (\hat{L}_-)^{l-m} \psi_{ll} \quad (4.66)$$

ولحساب ψ_{lm} نفسها ، التي تحسب منها كافة التتابع بالتتالي، نجري التحويل التالي :

$$\psi_{ll} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi} \Theta_{ll}(\theta) \quad (4.67)$$

فإذا علمنا أن $\hat{L}_+ \psi_{lm} = 0$ عندما $l=m$ (لأن m لا يمكن أن تتجاوز l) وبدلنا \hat{L}_+ بقيمتها من (4.9) و ψ_{ll} بقيمتها طبقاً لـ (4.67) فإننا نجد :

$$\hbar e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) e^{i\ell\varphi} \Theta_{\ell\ell}(\theta) = 0 \quad (4.68)$$

$$\frac{d\Theta_{\ell\ell}}{\Theta_{\ell\ell}} = \ell \cot \theta d\theta$$

ومنه نجد :

$$\Theta_{\ell\ell} = A \sin^{\ell} \theta$$

وبالاستكمال نجد :

$$(4.69)$$

حيث A ثابت تنظيم يحسب طبقاً للعلاقة :

$$\int_0^{\pi} \Theta_{\ell\ell}^* \Theta_{\ell\ell} \sin \theta d\theta = 1 \Rightarrow A^2 \int_0^{\pi} \sin^{\ell} \theta \sin \theta d\theta = 1$$

وبفرض $x = \cos \theta$ فإن التكامل السابق يتحول الى الشكل :

$$A^2 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\ell} dx = A^2 \frac{(2\ell)!}{(2\ell+1)!} = 1$$

ومنه نحصل على الثابت A :

$$A = \frac{\sqrt{(2l+1)!}}{l! 2^l \sqrt{2}}$$

(4.70)

ولا تتغير النتيجة من الناحية الفيزيائية إذا ضربنا A بمضروب \square_{ll} :
 حيث نجد أخيراً التابع \square_{ll} :

$$\square_{ll} \equiv |l, l\rangle = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}} \sin^l \theta \quad (4.71)$$

ومن السهل الآن حساب كافة التوابع Ψ_{lm} بتطبيق العلاقة التكرارية (4.66) بالتالي انطلاقاً من (4.71) حيث نحصل أخيراً أعلى

ما يسمى المتوافقات الكروية (spherical functions) التي نرمز لها بالرمز $\Psi_l^m(\theta, \varphi)$ الكروية

والتي توضع بالشكل :

$$\Psi_l^m(\theta, \varphi) \equiv |l, m\rangle = \square_{lm} \Phi_m = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(x) e^{im\varphi} \quad (4.72)$$

حيث $P_l^m(x)$ هي ما يسمى كثير حدود ليجاندر الموحد (Legendre's associated polynomial) التي تعطى بالعلاقة :

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \left[\frac{(x^2-1)^l}{2^l l!} \right] ; (x = \cos \theta) \quad (4.73)$$

وسنرى في الفصل القادم أن $\Psi_l^m(\theta, \varphi)$ هو التابع الخاص للقسم الزاوي من مؤثر لابلاس المعبر عنه بالاحداثيات الكروية .

33- القيم الخاصة لمؤثر الانعكاس :

يعرف مؤثر الانعكاس بالعلاقة :

(4.74)

$$\hat{P} \Psi(x, y, z) = \Psi(-x, -y, -z)$$

أي أن تأثير هذا المؤثر ينحصر في عكس اشارات الاحداثيات ، وهذا يكافئ البحث عن نظير النقطة $M(x, y, z)$ بالنسبة للمبدأ ودراسة ماذا يحدث للتابع الموجي $\Psi(x, y, z)$ نتيجة لذلك شكل (4.1)

أما إذا عبرنا عن التابع ψ بالاحداثيات الكروية (r, θ, φ) فان تعريف المؤثر \hat{P} يعطى بالعلاقة :

$$\hat{P} \psi(r, \theta, \varphi) = \psi(r, \pi - \theta, \pi + \varphi) \quad (4.75)$$

لنختبر التابع الذي عُبر عن قسمه الزاوي بالعلاقة (4.72) :

$$\hat{P} \psi(r, \theta, \varphi) = \hat{P} c f(r) Y_l^m(\theta, \varphi) = c f(r) P_l^m(-\cos \theta) e^{im(\pi + \varphi)}$$

وطبقاً لـ (4.73) يتغير P_l^m عندما نبدل $\cos \theta$ بـ $\cos(\pi - \theta)$ حسب العلاقة :

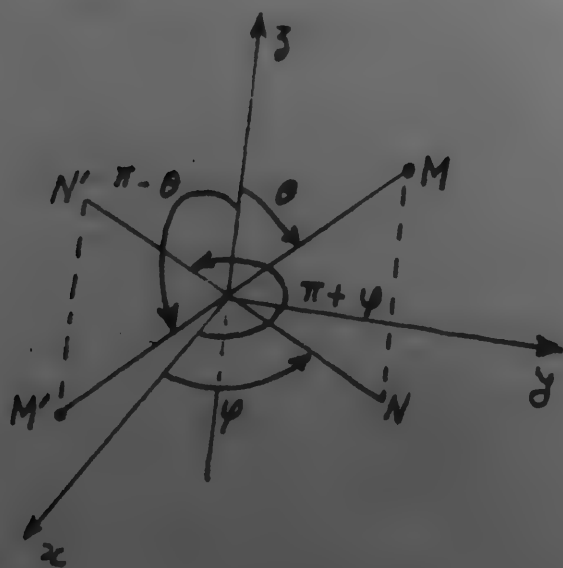
$$P_l^m(-\cos \theta) = (-1)^{l+m} P_l^m(\cos \theta)$$

أما التابع المتعلق بالزاوية φ فيتحول الى الشكل :

$$\Phi(\varphi + \pi) = e^{im(\varphi + \pi)} = e^{im\pi} e^{im\varphi} = (-1)^m \Phi(\varphi)$$

ونتيجة لذلك يكون :

$$\hat{P} \psi(r, \theta, \varphi) = (-1)^{l+m} (-1)^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} = (-1)^l \psi(r, \theta, \varphi) \quad (4.76)$$



شكل (4.1)

أي أن القيمة الخاصة لمؤثر الانعكاس هي $(-1)^l$. فالتابع الخاص لمؤثر العزم الحركي لا يتغير عند تبديل θ بـ $\pi - \theta$ و φ بـ $\varphi + \pi$ ، إذا كان l زوجياً ويقال عندئذ أن زوجية (Parity) التابع ψ هي زوجية العدد l نفسها .

مسائل الفصل الرابع

١- من المعلوم أن مؤثر السبين \hat{S} يحقق علاقات تبادلية مشابهة لما يحققه المؤثر \hat{L} وبصورة خاصة لدينا :

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{S}_k$$

فاذا علمت أيضا أن مؤثر العزم الكلي يعطى بالعلاقة :

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

فاحسب المبدلات :

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] : (i, j = 1, 2, 3).$$

٢- برهن أن العلاقات التبادلية (4.19 a) تبقى محققة عند دوران

المحاور الاحداثية في الفراغ بزاوية ما بحيث يتحول

$\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ الى $\hat{L}'_x, \hat{L}'_y, \hat{L}'_z$ طبقاً للعلاقات :

$$\hat{L}'_x = \alpha_{11} \hat{L}_x + \alpha_{12} \hat{L}_y + \alpha_{13} \hat{L}_z$$

$$\hat{L}'_y = \alpha_{21} \hat{L}_x + \alpha_{22} \hat{L}_y + \alpha_{23} \hat{L}_z$$

$$\hat{L}'_z = \alpha_{31} \hat{L}_x + \alpha_{32} \hat{L}_y + \alpha_{33} \hat{L}_z$$

حيث أن α_{ik} هي جيوب التمام الموجهة للمحاور x', y', z' بالنسبة للمحاور x, y, z وهي تحقق العلاقات :

$$\sum_i \alpha_{ik} \alpha_{il} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = k \\ 0 & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

٣- جسيم عزمه المداري \hat{L} وسبينه \hat{S} وعزمه الكلي $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$

نفرض أن :

$$\hat{L}^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m, \quad \hat{L}_z Y_l^m = \hbar m Y_l^m$$

$$\hat{S}^2 \chi = \hbar^2 s(s+1) \chi, \quad \hat{S}_z \chi = \hbar m_s \chi$$

حيث Y_l^m, χ هي التوابيع الخاصة لمؤثري العزم الحركي والسبين

على السرب .
 ٦ - احسب التوابيع الخاصة لمؤثر العزم الكلي $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$

اذا علمت أن : $S = \frac{1}{2}$
 ب - كيف تحسب القيم الخاصة للمؤثرات التالية : $\hat{J}^2, \hat{L}^2, \hat{S}^2$.

٤ - ليكن المؤثر \hat{M}_x الذي يحقق العلاقة $\hat{L}_x \psi = 0$
 أ - احسب التابع الخاص لهذا المؤثر في الحالة P ($l = 1$).
 ب - هل يمكن أن يكون للمؤثرين \hat{L}_x, \hat{L}_y التابع الخاص نفسه الذي حسبته في الطلب الأول ؟ ولماذا ؟

٥ - احسب القيمة الخاصة لمؤثر هاميلتون لدوامة متناظرة اذا علمت أن طاقتها الكلاسيكية تعطى بالعلاقة :

$$E = \frac{1}{2I_x} [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2] + \frac{1}{2I_z} \hat{L}_z^2$$

حيث \hat{L} العزم الحركي للدوامة حول O (مركز الاحداثيات)،
 I_x, I_y, I_z هي عزوم العطالة حول المحاور الأساسية للدوامة .

٦ - احسب المبدلات :

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_x^2], [\hat{L}_z, \hat{L}_x \hat{L}_y], [\hat{L}_x, \hat{V}(x)]$$

حيث $V(x)$ هو مؤثر الكمون .

٧ - اذا علمت أن $\hat{L}_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$ فبرهن صحة العلاقة :

$$\langle \hat{L}_x \rangle = \langle \hat{L}_y \rangle = 0$$

٨ - احسب انطلاقاً من العلاقات التي رأيتها في هذا الفصل التوابيع الكروية المقابلة لـ $l = 0, 1, 2, 3$ ، وبرهن أنك تحصل على مايلي:

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi},$$

$$Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}, \quad Y_3^0 = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3),$$

$$\psi_{\pm 1} = \sqrt{\frac{41}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\varphi}, \quad \psi_{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\varphi}$$

$$\psi_{\pm 3} = \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\varphi}.$$

9 - احسب المساقط الديكارتية للاندفاع \hat{p} ولمساقط عزم الاندفاع \hat{L} في الاحداثيات الكروية انطلاقا من العلاقات :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos \frac{z}{r},$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$

10 - جملة كوانتية موءلفة من جسيمين . برهن أنه من الممكن ، في آن واحد ، قياس احدى المجموعتين :

$$\{\hat{L}_1^2, \hat{L}_{1z}, \hat{L}_2^2, \hat{L}_{2z}\}, \quad \{\hat{L}_1^2, \hat{L}_2^2, \hat{L}^2, L_z\}$$

وذلك باهمال التأثير المتبادل بين الجسيمين .

11 - ليكن الموءثر \hat{M} الموءلف من جداء المركبتين \hat{L}_y, \hat{L}_x بالشكل

$$\hat{M} = \frac{1}{2} (\hat{L}_x \hat{L}_y + \hat{L}_y \hat{L}_x)$$

التالي :

أ- برهن أن \hat{M} هرميتي .

ب - احسب القيمة الوسطى للموءثر \hat{M} .

ج - احسب القيمة الوسطى لمربع هذا الموءثر .

توجيه : استفد من الموءثرين \hat{L}_+, \hat{L}_- .

12 - يعطى التابع الموجي لجسيم يتحرك في حفرة كمون كروية في لحظة ما بالشكل :

$$\psi = (x + y + z) e^{-\alpha \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

والمطلوب البرهان أنه عند قياس \hat{L}^2 و \hat{L}_z فاننا نحصل على k^2 و k على الترتيب .



الفصل الخامس

الحركة في حقل مركزي متناظر

34- معادلة شرودنغر :

من المعلوم في الميكانيك الكلاسيكي أن حركة جملة مادية مؤلفة من جسيمين معينين بالأحداثيين \vec{r}_1 و \vec{r}_2 يتفاعلان بواسطة الكمون $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$: تنوّل الى حركة جسيم واحد كما في حقل مركزي متناظر . ولبرهان ذلك نكتب تابع لاغرانج لهذه الجملة :

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \quad (5.1)$$

فاذا استعضنا عن الاحداثيين \vec{r}_1 و \vec{r}_2 بأحداثيين جديدين طبقا للعلاقتين :

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (5.2)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) \quad (5.3)$$

فان تابع لاغرانج يتحول الى الشكل :

$$\text{حيث } \mu \text{ و } M \text{ هما الكتلة المختزلة ومجموع الكتلتين على الترتيب:} \quad (5.4)$$

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

ميكانيك الكم ٢ - ١٠

أما تابع هاميلتون لجملة الجسيمين فيحسب بسهولة حيث نجد أخيراً:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + V(r) \quad (5.6)$$

حيث \vec{P} هي اندفاع مركز الكتلة $(\vec{P} = M \cdot \dot{\vec{R}})$ و \vec{p} هي الاندفاع النسبي $(\vec{p} = \mu \cdot \dot{\vec{r}})$. وعند الانتقال إلى ميكانيك الكم يتحول تابع هاميلتون (5.6) إلى مؤثر هاميلتون بعد أن يتحول الاندفاعان \vec{P} و \vec{p} إلى مؤثرين طبقاً للعلاقتين:

$$\hat{P} = -i\hbar \nabla_R, \quad \hat{p} = -i\hbar \nabla_r \quad (5.7)$$

أما الشكل الصحيح لمؤثر هاميلتون بدلالة المؤثرين السابقين ومؤثر الكمون:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + \hat{V}(\vec{r}) \quad (5.8)$$

ومعادلة شرودنغر تكون:

$$\hat{H} \Psi(\vec{R}, \vec{r}) = E \Psi(\vec{R}, \vec{r}) \quad (5.9)$$

وبما أن المؤثر \hat{H} انقسم إلى قسمين مستقلين: الأول تابع لأحداثيات مركز الكتلة \vec{R} والثاني للأحداثيات النسبية \vec{r} فإن التابع الموجي $\Psi(\vec{R}, \vec{r})$ سينقسم إلى جداء تابعين مستقلين هما $\psi(\vec{r})$ و $\psi(\vec{R})$ ، حيث يصف الأول $\psi(\vec{r})$ حركة الكتلة المختزلة μ عندما تتحرك في حقل كمون $V(\vec{r})$ ويصف الثاني الحركة الحرة لمركز الكتلة (وذلك بفرض عدم وجود قوى خارجية تؤثر على جملة الجسيمين)، هذا مع العلم أن التابعين $\psi(\vec{R})$ و $\psi(\vec{r})$ يحققان المعادلتين:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 \psi(\vec{R}) &= E_R \psi(\vec{R}) & (a) \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + \hat{V}(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) &= E_r \psi(\vec{r}) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

وفي الحالة الخاصة عندما تكون كتلة أحد الجسيمين أكبر بكثير من الثاني ($m_1 \gg m_2$ مثلاً) فإن الكتلة المختزلة μ تتحول إلى الكتلة m_2 طبقاً للعلاقة:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_2 \approx m, \quad M \gg m$$

ومن الواضح أن هذه الحالة تنطبق على الحركة في حقل مركزي متناظر

حيث نغرض أن وجود حقل متناظر $V(\vec{r})$ ناتج عن جسيم كتلته كبيرة (الواة مثلاً) يتحرك ضمن هذا الحقل جسيم آخر كتلته صغيرة جداً بالنسبة للأول (الالكترون مثلاً). أما معادلة شرودنجر (5.9b) فتتحول إلى الشكل :

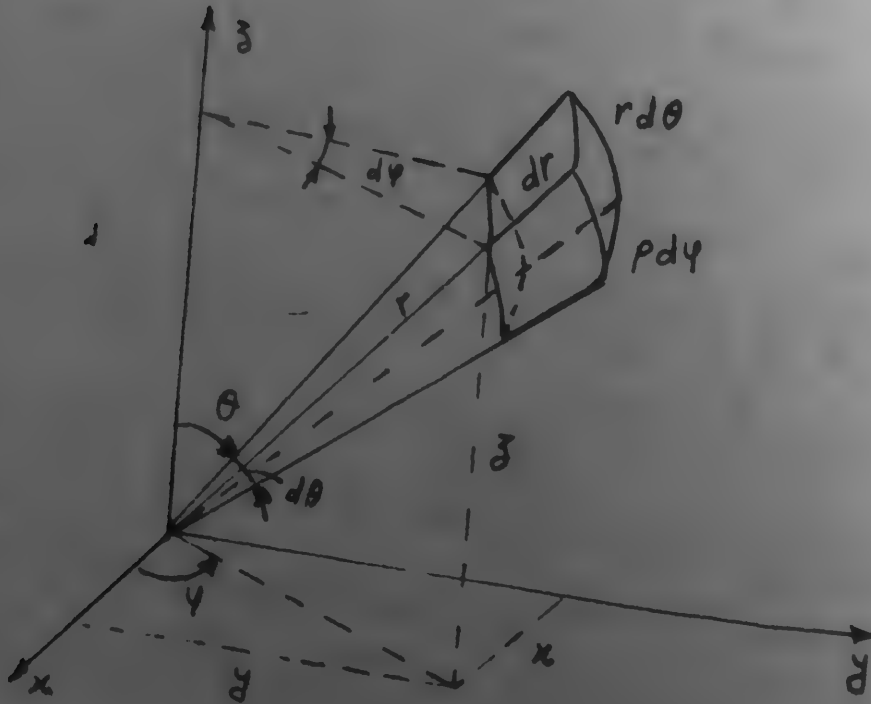
$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(\vec{r})] \psi(\vec{r}) = 0 \quad (5.10)$$

ولحل هذه المعادلة لابد من حساب ∇^2 في الاحداثيات الكروية الذي يكون تابعاً فقط لـ \vec{r} ، يمثل في هذه الحالة متجه موضع الجسيم. ذي الكتلة $m_1 = m$ انطلاقاً من مركز الجسيم ذي الكتلة الأكبر، هذا المركز الذي يعتبر مركزاً للاحداثيات. وفي الفقرة القادمة نحسب المؤثر ∇^2 .

3. حساب ∇^2 في الاحداثيات الكروية :

يحدد مكان النقطة المادية (الجسيم) في الاحداثيات الكروية بثلاثة وسطاء هي (r, θ, φ) كما في الشكل (5.1) أما عنصر الحجم dV فيساوي :

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$



ولكتابة معادلة شرودنجر في الاحداثيات الكروية ينبغي حساب اللاپلاسيان (المؤثر ∇^2) أولاً ولذلك نكتب :

شكل (5.1)

$$\Delta \psi = \nabla^2 \psi = \text{div grad } \psi = \text{div } \vec{B}$$

(5.13) حيث \vec{B} هو متجه مركباته على المحاور الاحداثية القطبية الموافقة

$$B_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}, B_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, B_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad (5.12)$$

$$\text{div } \vec{B} = \lim_{\delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}}{\delta v} = \frac{1}{\delta v} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i \delta s_i) \delta x_i \quad (5.13)$$

ولحساب \vec{B} ننتقل من تعريف التدفق :
حيث δs_i هي السطوح العنصرية الموضحة على الشكل (5.1) وهي تساوي على الترتيب :

$$\left. \begin{aligned} \delta s_r &= r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ \delta s_\theta &= r \sin \theta \, dr \, d\varphi \\ \delta s_\varphi &= r \, dr \, d\theta \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

فاذا بدلنا قيم B_i من (5.12) نجد :

$$\text{div } \vec{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \right) dr + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} r \sin \theta \, dr \, d\varphi \right) d\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} r \, dr \, d\theta \right) d\varphi \right\} \quad (5.15)$$

ومنه نجد أخيرا اللابلاسيان في الاحداثيات الكروية :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (5.16)$$

لنرمز للقسم الاول بالرمز ∇_r^2 وللثاني بالرمز $\nabla_{\theta, \varphi}^2$ أي :

$$\nabla^2(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \quad (5.17)$$

$$\nabla^2(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (5.18)$$

$$\nabla^2(r, \theta, \varphi) = \nabla^2(r) + \frac{1}{r^2} \nabla^2(\theta, \varphi)$$

أما معادلة شرودنجر فتكتب بالشكل :

$$\left[\nabla^2(r) + \frac{1}{r^2} \nabla^2(\theta, \varphi) \right] \psi(r, \theta, \varphi) + k^2(r) \psi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (5.19)$$

حيث :

$$k^2(r) = \frac{2M}{r^2} [E - V(r)] \quad (5.20)$$

وهو مقدار تابع لـ r فقط .

36- حل معادلة شرودنغر بطريقة فصل التحويلات :

ان معادلة شرودنغر (5.19) هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية حلها هو تابع ما للاحداثيات من الشكل $\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \varphi)$ (وسنجد فيما بعد) أما المقدار $|\psi(r, \theta, \varphi)|^2$ فيمثل احتمال وجود الجسيم في النقطة (r, θ, φ) من الفراغ . أما الشروط العامة التي يجب أن يحققها التابع الموجي من محدودية واستمرار ووحدة انهماسة تعيين فهي ما سيعطينا طاقة هذا الجسيم .

من الواضح أن الحل العام للمعادلة (5.19) هو تابع للكمون $V(r)$ الذي يخضع له الجسيم ، إلا أنه ، بالرغم من عدم معرفة هذا الكمون ، يمكن إيجاد الحل العام لهذه المعادلة ، المتعلق بالزاويتين θ, φ ، ولذلك نتبع طريقة فصل المحولات .

ولنبحث عن الحل لمعادلة شرودنغر (5.19) بشكل جداء تابعين الأول تابع للمتحول r (القسم القطري) والثاني تابع للزاويتين θ, φ (القسم الزاوي) وهذا ممكن لأن المؤثر ∇^2 انقسم إلى قسمين مستقلين طبقاً لـ (5.18) فلنفرض ، إذن ، الحل العام من

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi) \quad (5.21)$$

لنضرب طرفي المعادلة (5.19) بالمقدار $r^2/[R(r) Y(\theta, \varphi)]$ فنجد :

$$r^2 \nabla_r^2 \frac{R(r) Y(\theta, \varphi)}{R(r) Y(\theta, \varphi)} + \nabla^2(\theta, \varphi) \frac{R(r) Y(\theta, \varphi)}{R(r) Y(\theta, \varphi)} + r^2 k^2(r) \frac{R(r) Y(\theta, \varphi)}{R(r) Y(\theta, \varphi)} = 0$$

أو :

$$r^2 \nabla_r^2 \frac{R(r)}{R(r)} + r^2 k^2(r) = - \nabla^2(\theta, \varphi) \frac{Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)} \quad (5.22)$$

وهكذا تنقسم المعادلة (5.19) إلى قسمين الأيسر منها تابع للمحول المستقل r والأيمن تابع للمتحولين المستقلين (θ, φ) ، فتتلى

سنحقق المساواة بينهما لابد أن يساوي كل منهما مقداراً ثابتاً
غير متعلق بالمتحولات (r, θ, φ) فليكن هذا المقدار λ وعندئذ

$$r^2 \frac{\nabla^2(r) R(r)}{R(r)} + r^2 k^2(r) = \lambda \Rightarrow [\nabla^2(r) + k^2 - (\lambda/r^2)] R(r) = 0 \quad (5.23)$$

$$-\frac{\nabla^2(\theta, \varphi) Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)} = \lambda \Rightarrow [\nabla^2(\theta, \varphi) + \lambda] Y(\theta, \varphi) = 0 \quad (5.24)$$

من الواضح أن المعادلة الأخيرة (5.24) لا تتعلق إلا بالزاويتين θ, φ وبما أن الكمون في الحقل المركزي المتناظر تابع لـ r فقط فإن (5.24) ستكون صحيحة لكل أنواع الحركة في الحقل المركزي، وسنبحث الآن عن الحل العام لهذه المعادلة طبقاً لطريقة فصل المتحولات أيضاً فنفرض هنا الحل من الشكل :

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad (5.25)$$

ونكتب الموشر $\nabla^2(\theta, \varphi)$ بالشكل :

$$\nabla^2(\theta, \varphi) = \nabla^2(\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \nabla^2(\varphi) \quad (5.26a)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(\theta) &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) \\ \nabla^2(\varphi) &= \frac{d^2}{d\varphi^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{حيث :} \quad (5.26)$$

ثم نبدل ذلك في (5.24) ونقسمها على المقدار $\Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ فنحصل على العلاقة :

$$\frac{\nabla^2(\theta) \Theta(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\nabla^2(\varphi) \Phi(\varphi)}{\Phi(\varphi)} + \lambda = 0 \quad \text{أو :}$$

$$\sin^2 \theta + \frac{\nabla^2(\theta) \Theta(\theta)}{\Theta(\theta)} + \lambda \sin^2 \theta = - \frac{\nabla^2(\varphi) \Phi(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \quad (5.27)$$

وهي مساواة بين طرفين كل منهما تابع لمتحول مستقل فلكي تتحقق هذه المساواة يجب أن يساوي كل من الطرفين قيمة ثابتة m^2 وعندئذ نحصل على المعادلتين :

$$\nabla^2(\theta) \Theta(\theta) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta(\theta) = 0 \quad (5.28)$$

$$\nabla^2(\varphi) \Phi(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0$$

وهكذا انقسمت معادلة شرودنجر (5.27) الى ثلاث معادلات مستقلة
 (5.28) ، (5.29) ، (5.30) . والحل العام للمعادلة
 (5.30) سيكون جداء التوابع الثلاثة المحققة للمعادلات المذكورة:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$$

ولحساب ψ بشكله النهائي يجب دائما البدء بحل المعادلة الأخيرة
 (5.29) باعتبارها تحوي وسيطا واحدا m ثم نبدل قيمته
 في (5.28) ونحلها وبالتالي نجد التابع $V(r, \theta)$. أما لحساب
 $R(r)$ فلا بد من معرفة الكمون $V(r)$ وسندرس ذلك بالتفصيل فيما
 بعد . أما الآن فسنبحث في تنظيم التابع الموجي ψ ، والشرط العام
 لذلك كما نعلم، هو أن يساوي الواحد احتمال وجود الجسيم في كل
 نقط الفراغ أي :

$$\int \psi^* \psi dV = 1$$

فاذا بدلنا كلا من ψ و dV بقيمتيهما نجد :

$$\int_0^\infty R^*(r) R(r) r^2 dr \int_0^\pi \Theta^*(\theta) \Theta(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \Phi^*(\varphi) \Phi(\varphi) d\varphi = 1 \quad (5.30)$$

وهذا يعني أنه من الممكن اجراء عملية التوحيد (التنظيم) كما
 يلي :

$$\int_0^\infty R^*(r) R(r) r^2 dr = 1 \quad (5.31)$$

$$\int_0^\pi \Theta^*(\theta) \Theta(\theta) \sin \theta d\theta = 1 \quad (5.32)$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi^*(\varphi) \Phi(\varphi) d\varphi = 1 \quad (5.33)$$

37- التوابع الموجبة الزاوية الخاصة - التوابع الكروية :

(Spherical Functions , Harmonique Spherique)

لنبدأ الآن بحل المعادلة (5.29) ولهذا نكتبها بالشكل :

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0$$

وحلها يمكن أن يكتب بأحد شكلين :

$$\Phi = A \cos (m\varphi + \varphi_0)$$

(5.34)

$$\Phi = c_1 e^{im\psi} + c_2 e^{-im\psi}$$

أو : (5.35)
ومن الواضح أن لكل من الحلين معنى فيزيائيا مختلفا عن الآخر :
فالأول يعني أن الجسم يتحرك بحركة اهتزازية حول مركز القوى
(مركز الاحداثيات) ، أما الثاني فيعني أن الموجة المرافقة له
تتحرك على دائرة بحيث يصف القطر المتجه (شعاع الموضع)
الواصل من مركز القوى إلى الجسم المتحرك زاوية ψ ، وسنختار هذه
الحالة الأعم . أما القسم الثاني من هذا الحل فيمكن الحصول عليه
من القسم الأول بتبديل m ب $-m$. ولذلك وتسهيلا للعمل سنقتصر على
القسم الأول منه ونعتبر أن m عدد جبري (موجب أو سالب)
وبالتالي فالحل المطلوب يكتب بصورته النهائية بالشكل :

$$\Phi = c e^{im\psi}$$

حيث c ثابت يتعين من شرط التنظيم (5.33) أي :

$$\int_0^{2\pi} c^* c e^{-im\psi} e^{im\psi} d\psi = c^2 \int_0^{2\pi} d\psi = 1$$

ومنه نجد $c = 1/\sqrt{2\pi}$ ، وعندئذ يكون :

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\psi} \quad (5.36)$$

ولحساب قيمة الثابت m نستفيد من وحدانية تعيين التابع
الموجي التي تعني، فيزيائيا، أن الجسم الموصوف بتابع ψ لا يمكن أن
يوجد في موضعين مختلفين بآن واحد . فلنطبق هذا على التابع
الدوري Φ الذي يجب أن يأخذ التعيين نفسه من أجل الزاوية
 $\psi' = \psi + 2\pi$ أي :

$$\Phi(\psi') = \Phi(\psi + 2\pi) = \Phi(\psi) \quad (5.37)$$

أي أن التابع Φ يجب أن يأخذ التعيين نفسه بعد إجراء دورة واحدة
فاذا بدلنا في (5.36) نجد :

$$e^{im\psi} = e^{im(\psi+2\pi)} \Rightarrow e^{2im\pi} = 1 \quad (5.38)$$

وحتى نتحقق هذه المعادلة يجب أن تأخذ m القيم الصحيحة التالية:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

(5.39)

حيث يسمى m : العدد الكمي المغناطيسي (Magnetic quantum number)

((Nombre quantique magnétique))

ويمكن أخيراً ^{التأكد} من أن التوابع Φ_m تحقق الشرط (3.19) أي :

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^* \Phi_m d\varphi = \delta_{mm'}$$

وهي، كما رأينا، علاقة شبيهة بالجداء العددي لمتجهات الواحد في الفراغ العادي، وسنرى أن التوابع $\Psi(0, \varphi)$ تحقق العلاقة نفسها ولهذا يمكن اعتبار هذه التوابع كمتجهات في فراغ هيلبرت وتطبق كل العمليات التي تجري على المتجهات في الفراغ العادي (x, y, z) على التوابع الموجية في هذا الفراغ الجديد .

وبهذا نكون قد انتهينا من دراسة التابع Φ ، وسنبحث عن المعنى الفيزيائي للعدد الكمي m بعد حل المعادلة (5.28) وحساب (5.40)، ولحلها نغير المتحول θ فنفرض متحولا جديداً $x = \cos \theta$ فنجد بعد ملاحظة أن:

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx} \quad (5.40)$$

وأن $\nabla^2(\theta)$ يتحول الى الصيغة التالية :

$$\begin{aligned} \nabla^2(\theta) \Theta &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) \Theta = \\ &= -\frac{\sin \theta}{\sin \theta} \frac{d}{dx} \left[\sin \theta (-\sin \theta) \frac{d}{dx} \Theta \right] = [(1-x^2) \Theta_x']' \quad (5.41) \end{aligned}$$

وبالتبديل في المعادلة (5.28) نجد أخيراً :

$$[(1-x^2) \Theta_x']' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \Theta = 0 \quad (5.42a)$$

ولهذه المعادلة نقطة شاذة هي $x = \pm 1$ ، وحتى نتخلص من

الشذوذ نبحث عن حل لها من الشكل :

$$\Theta(x) = (1-x^2)^{s/2} u(x)$$

(5.42)

$$\Theta'(x) = -sx(1-x^2)^{s/2-1} u(x) + (1-x^2)^{s/2} u'(x)$$

نشتق فنجد :

$$\Theta(x) = -5x(1-x^2)^{5/2}$$

ضرب هذه المعادلة بـ $(1-x^2)$ ثم نحسب المقدار $[(1-x^2)\Theta']'$

$$[(1-x^2)\Theta']' = -5(1-x^2)^{5/2} u + 5^2 x^2 (1-x^2)^{5/2-1} u' + 5x(1-x^2)^{5/2} u'' - 2\left(\frac{5}{2}+1\right)x(1-x^2)^{5/2} u' + (1-x^2)^{5/2+1} u''$$

$$\frac{5^2 x^2}{1-x^2} = \frac{5^2(x^2-1)}{1-x^2} + \frac{5^2}{1-x^2} = -5^2 + \frac{5^2}{1-x^2}$$

ثم بدلنا في (5.28a) فاننا نجد المعادلة التالية :

$$(1-x^2)u'' - 2x(1+5)u' + \left(\lambda - 5^2 - 5 + \frac{5^2 - m^2}{1-x^2}\right)u = 0 \quad (5.43)$$

وهنا نتجنب النقطة الشاذة عندما $x \rightarrow 1$ بأن نفرض $s = \pm m$ وهذا ممكن باعتبار أن الثابت s اختياري .

وبما أن المعادلة (5.43) تتبع m^2 (وليس m) فإن الحلين الموافقين للقيمتين m و $-m$ سيكونان متكافئين ويمكن الحصول على أحدهما من الآخر بتبديل m بـ $-m$ أي :

$$\Theta(m) = A \Theta(-m) \quad (5.44)$$

لنبحث أولاً عن الحلول التي توافق m الموجبة أي $m=s \gg 0$ وعندئذ نكتب المعادلة (5.43) بالشكل :

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + [\lambda - m(m+1)]u = 0 \quad (5.45)$$

ولحل هذه المعادلة الأخيرة التي لا تحوي أي شذوذ نتبع طريقة السلاسل فنفرض أن الحل بشكل سلسلة :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

نشتق ونبدل فنجد :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ k(k-1)a_k x^{k-2} + a_k [\lambda - (k+m)(k+m+1)] x^k \right\} = 0$$

فاذا عزلنا الحدود من المرتبة k نجد :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (k+2)(k+1)a_{k+2} + [\lambda - (k+m)(k+m+1)]a_k \right\} x^k = 0 \quad (5.47)$$

ومن هنا تنتج العلاقة التكرارية :

$$a_{k+2} = - \frac{\lambda - (k+m)(k+m+1)}{(k+2)(k+1)} a_k \quad (5.48)$$

وهكذا نجد أن الحدود a_{k+2} تعطي بدلالة a_k فالزوجية بدلالة الزوجية والفردية بدلالة الفردية وتكون السلسلة بقوى فردية أو زوجية تبعا لدرجة الجداء الأول وأمثاله التي تؤخذ اختيارية. ان شرط محدودية التابع الموجي تتطلب منا أن نقطع السلسلة عند حد معين q كان يكون مثلا :

$$a_{q+1} \neq 0, \quad a_q = 0 \quad (5.49)$$

وعندئذ نجد من (5.48) أن :

$$\lambda = (q+m)(q+m+1), \quad (q = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.50)$$

فاذا فرضنا عددا كميًا جديدًا l يسمى العدد الكمي المداري

(*Nombre quantique azimutal, Orbital quantum number*) ، بحيث يكون :

$$l = q + m \quad (5.51)$$

نجد أن العدد l يمكنه أن يأخذ القيم : $l = 0, 1, 2, \dots$ ويحقق

$$\text{العلاقة } l \geq m \text{ وعندئذ نكتب الوسيط } \lambda = l(l+1) \quad (5.52)$$

أما المعادلة (5.45) فتكتب عندئذ بالشكل :

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + [l(l+1) - m(m+1)]u = 0 \quad (5.53)$$

وهي معادلة ليجاندر وحلها سيكون بالشكل :

$$u(x) = a_{l-m} x^{l-m} + a_{l-m-2} x^{l-m-2} + \dots \quad \begin{cases} a_0 \\ a_1 \end{cases} \quad (5.54)$$

ويمكن التعبير عن التابع $u(x)$ بتوابع ليجاندر $P_l^m(x)$ ولبرهان

$$u = (x^2 - 1)^l$$

ذلك نفرض :

$$(5.55)$$

الذي يحقق المعادلة التفاضلية :

$$(1-x^2) u' + 2lxu = 0$$

(5.56)

لنأخذ المشتق من المرتبة $l+m+1$ للمعادلة السابقة ونفرض:

$$u^{(l+m)} = \frac{d^{l+m} (x^2-1)^l}{dx^{l+m}} \equiv u_1 \quad (5.57)$$

ويسهل حساب هذا المشتق باستعمال قاعدة ليبنتز وهي:

$$(y^m)' = y^{(m)} + m y^{(m-1)} y' + \frac{m(m-1)}{2!} y^{(m-2)} y'' + \dots + y^{(m)} \quad (5.58)$$

وبالاشتقاق نلاحظ أن التابع u_1 يحقق المعادلة:

$$(1-x^2) u_1'' - 2x(m+1) u_1' + (l+m+1)(l-m) u_1 = 0 \quad (5.59)$$

وهي المعادلة نفسها التي يحققها التابع u أي أنه يجب أن يكون:

$$u = \text{const. } u_1 \quad (5.60)$$

وبما أن ثابت التنظيم لم يعين حتى الآن فيمكننا أن نكتب الثابت في (5.60) يساوي $(1/2^l l!)$ وذلك حتى نحصل منها عند تبديل m بالمفر على كثيرة حدود ليجاندر المعروفة:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (x^2-1)^l}{dx^l} \quad (5.61)$$

وعندئذ نضع التابع u كما يلي:

$$u = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m} (x^2-1)^l}{dx^{l+m}} \quad (5.62)$$

وأخيرا فالتابع $H(x)$ سيكون:

(5.63)

$$H_l^m(x) = C_l^m P_l^m(x)$$

حيث C_l^m هو ثابت يعين من شرط التنظيم (5.32) أما $P_l^m(x)$ فهو تابع ليجاندر الموحد (وهو يتطابق مع كثير حدود ليجاندر المعطى بالعلاقة (4.75) التي رأيناها في الفصل السابق) التالي:

(5.64)

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m} [(x^2-1)^l]}{dx^{l+m}}$$

لقد استنتجت (5.64) باعتبار أن $m > 0$ ولكنها يمكن أن تعمم على قيم m السالبة بفضل العلاقة المعروفة:

$$P_l^m = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x)$$

(5.63)

ومن (5.64) و (5.65) يسهل معرفة مجال تغير العدد الكمي m حيث نلاحظ مباشرة من الأولى أن P_l^m ينعدم من أجل $|m| > l$ وبالتالي يكون :

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

(5.66)

ولحساب C_l^m في (5.63) نطبق العلاقة (5.62) فنجد :

$$\int_0^\pi \Theta_l^m \Theta_l^m \sin \theta d\theta = \int_{-1}^{+1} \Theta_l^m(x) \Theta_l^m(x) dx = 1 \quad (5.67)$$

فإذا بدلنا $\Theta(x)$ بقيمتها من (5.63) و (5.64) نجد أخيرا (ونكتفي هنا بكتابة النتيجة) :

$$C_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad (5.68)$$

وأخيرا نكتب تابع الزاويتين $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ بصورته النهائية من أجل قيم m الموجبة :

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \Theta_l^m \bar{\Phi}_m = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (5.69)$$

ولحساب Y_l^m عندما $m < 0$ نستخدم العلاقة (5.65) ولعل من المفيد في نهاية هذه الفقرة كتابة العبارة العامة للتوابع الكروية من أجل جميع قيم m الموجبة والسالبة وهي :

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = a_m \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (5.70)$$

$$a_m = \begin{cases} 1 & \text{if } m \geq 0 \\ (-1)^m & \text{if } m < 0 \end{cases} \quad \text{حيث :}$$

38 - المعنى الفيزيائي للعديدين الكميين m و l :
 لنبحث عن العلاقة بين المومنت \hat{L}^2 (مومنت مربع العزم الحركي)
 الذي رأيناه في الفصل السابق والقسم الزاوي من اللاپلاسيان المعطى
 بالعلاقة (5.17) . ولهذا نقابل أولا بين مومنت هاملتون
 المحسوب في بداية هذا الفصل وبين تابع هاملتون في الميكانيك
 الكلاسيكي ، لجسم يتحرك في حقل مركزي متناظر .

ان تابع لاغرانج لهذا الجسم يساوي :

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r) \quad (5.71)$$

ومنه :

$$P_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} , \quad P_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \quad (5.72)$$

واستنادا الى ذلك نحسب تابع هاملتون فنجد :

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) \quad (5.73)$$

فاذا علمنا أن العزم الحركي \vec{L} يعطى بالعلاقة (مع العلم أن الحركة
 تكون مستوية في هذه الحالة) :

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v} = m r \vec{e}_r \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = m r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z \quad (5.74)$$

أي أن :

$$|L| = m r^2 \dot{\varphi} = P_\varphi \quad (5.75)$$

وبالتبديل في (5.73) نحصل على تابع هاملتون بدلالة العزم
 الحركي :

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (5.76)$$

وبالانتقال الى ميكانيك الكم حيث تستبدل القيم الفيزيائية بموءثرات
 يكون :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2 \nabla_r^2}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + \hat{V}(r) = \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \nabla_r^2 + \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right] + \hat{V}(r) \quad (5.77)$$

أما معادلة شرودنجر فتوضع بالشكل :

$$\left[\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla_r^2 + \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right) + \hat{V}(r) \right] \psi(r, \theta, \varphi) = E \psi(r, \theta, \varphi) \quad (5.78a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + k^2(r) \psi(r, \theta, \phi) = 0$$

أو بالشكل :

$$\left(\nabla_r^2 - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2} \right) \psi(r, \theta, \phi) + k^2(r) \psi(r, \theta, \phi) = 0 \quad (5.71b)$$

حيث $k^2(r)$ هو التابع نفسه المعطى بالعلاقة (5.20). ومعارضة هذه المعادلة مع معادلة شرودنجر (5.19) ينتج أن

$$\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2} = -\nabla^2(\theta, \phi) \Rightarrow \hat{L}^2 = -\hbar^2 \nabla^2(\theta, \phi) \quad (5.79)$$

وعندئذ نضع المعادلة (5.24) بالشكل :

$$\hat{L}^2 Y(\theta, \phi) = \hbar^2 \lambda Y(\theta, \phi) \quad (5.24')$$

وهنا يتضح المعنى الفيزيائي للعدد λ : فالمقدار λ الذي يساوي $\ell(\ell+1)$ كما رأينا سابقا (انظر 5.52) هو القيمة الخاصة

للمؤثر $\nabla^2(\theta, \phi)$ (أو المؤثر \hat{L}^2) .

أما المعنى الفيزيائي للعدد m فيظهر بوضوح من (5.29) السـيـ

تكتب بالشكل :

$$\nabla^2 \Phi(\psi) = - \frac{d^2 \Phi(\psi)}{d\psi^2} = -m^2 \Phi(\psi)$$

وبالتالي فالعدد الكوانتي m هو القيمة الخاصة للمؤثر $d/d\psi$

الذي يرتبط مع \hat{L}_z بالعلاقة (4.5) .

لقد رأينا في الفصل السابق أن المؤثرات $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{H}$ تتبادل فيما

بينها عندما يكون الحقل مركزيا (انظر 4.43 وما بعدها) فهي

مجموعة مؤثرات متآلفة وبالتالي تكون المتوافقات الكروية (التي

حصلنا عليها في الفصل السابق كتوابع خاصة للمؤثرين \hat{L}^2 و \hat{L}_z

وحصلنا عليها في هذا الفصل بعد حل معادلة شرودنجر المتعلقة

بالقسم الزاوي)، تكون توابع خاصة مشتركة لجميع المؤثرات الثلاثة

المذكورة سابقا .

3- حركة جسيم على كرة (الدوار) (Rotator , Rotator) :

يطلق اصطلاح الدوار في الميكانيك الكلاسيكي ، على أي جسيم

يتحرك بحيث يبقى بعده عن نقطة ثابتة يساوي مقدارا ثابتا ؛ فهو بالتالي يتحرك على كرة مركزها 0 . وبالرغم من أن مفهوم الحركة

بمعناها الكلاسيكي غير وارد في ميكانيك الكم فقد استخدمنا هذا الاصطلاح لكي يتسنى فهم هذا المثال الذي تعتبر دراسته تطبيقاً جيداً على التوابع الكروية، كما يستفاد من نتائجه لمعرفة طيوف الجزيئات ثنائية الذرة ولدراسة الحركة في أي حقل مركزي وخاصة إذا كان كولونيا (نظرية ذرة الهيدروجين) .
ان الكمون المركزي الذي يخضع له جسيم يتحرك على كرة نصف

$$V(r) = V(a) = C \quad \text{قطرها } a \text{ هو :}$$

(5.80) وبما أن الطاقة الكامنة معينة بالتقريب إلى ثابت اختياري

فيمكن اختياره هنا بحيث يكون $V(a) = 0$ وبالتالي فان الطاقة الكلية تساوي الطاقة الحركية في الفيزياء الكلاسيكية :

$$E = T = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\varphi}^2 \quad (5.81)$$

وهنا في ميكانيك الكم نبدل الكمون بقيمته في (5.83) و λ

بقيمتها فنجد :

$$\nabla_r^2 R(r) + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (5.82)$$

وبما أن $r = a = \text{const.}$ يكون :

$$R(r) = R(a) \Rightarrow \nabla_r^2 R(r) = \nabla_r^2 R(a) = 0$$

ومنه نحسب طاقة الجسيم من (5.82) فنجد :

$$\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} = 0 \Rightarrow E = \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2J} \quad (5.83)$$

حيث $J = ma^2$ هو عزم عطالة الجسيم بالنسبة إلى مركز الكرة .

تبين العلاقة (5.83) أن طاقة الجسيم المدروس ستكون متقطعة

وهي تتناسب مع $\ell(\ell+1)$ حيث ℓ عدد صحيح ، كما رأينا ، وهذه الطاقة لا تتعلق بالعدد الكمي المغناطيسي m ولكن التابع الموجي المقابل $Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ يتعلق بـ m وبما أن m يمكن أن تتحول من $-\ell$ إلى $+\ell$ فهي تأخذ $(2\ell+1)$ قيمة ، وسوية الطاقة المقابلة للقيمة ℓ ستكون موءلفة من انطباق عدد من السويات يساوي $(2\ell+1)$ سوية (درجة الانطباق) ، وهذا يعني أن كل التوابع الموجية التي لها العدد الكمي ℓ نفسه وتختلف بالعدد المغناطيسي m تعطي الطاقة

نفسها فهي إذن لا تتعلق باتجاه العزم الحركي في الفراغ بل بقيمة هذا العزم ويسهل فهم ذلك إذا لاحظنا أن للحركة المدروسة تناظرا مركزيا وبالتالي فلكل الاتجاهات المارة في المركز القيمة نفسها. أما إذا تحرك الجسم المدروس في حقل مغناطيسي \vec{B} فاننا عمليا نكون قد انتقينا اتجاهها ما في الفراغ هو اتجاه هذا الحقل وبالتالي يزول الانطباق المنوه عنه وتنفصل السويات المذكورة التي $(l+1, l)$ سوية .

تسمى سويات الطاقة المختلفة بالقيم l بأسماء مختلفة، فالسوية التي تقابل $l=0$ تسمى الحالة S والسوية المقابلة $l=1$ الحالة P وهكذا حسب الجدول :

الحالة	S	P	d	f	g ...
العدد l	0	1	2	3	4 ...

(5.84)

لنحسب التابع الموجي المقابل لـ $l=0$ (الحالة S) فنجد حسب العلاقة

$$Y_0^0 = 1/\sqrt{4\pi} \quad (5.59) \quad \text{أن :}$$

$$|Y_0^0|^2 = |Y_0^0|^2 = \frac{1}{4\pi} \quad (5.85)$$

أما الكثافة الاحتمالية الزاوية فتساوي وعندما $l=1$ تأخذ m القيم $1, 0, -1$ وبالتالي نحصل على التتابع

$$\left. \begin{aligned} Y_1^{-1}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\varphi} \sin \theta \\ Y_1^0(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_1^1(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (5.86)$$

وتتساوى الكثافة الاحتمالية من أجل $m=1, m=0, m=-1$ في الحالتين

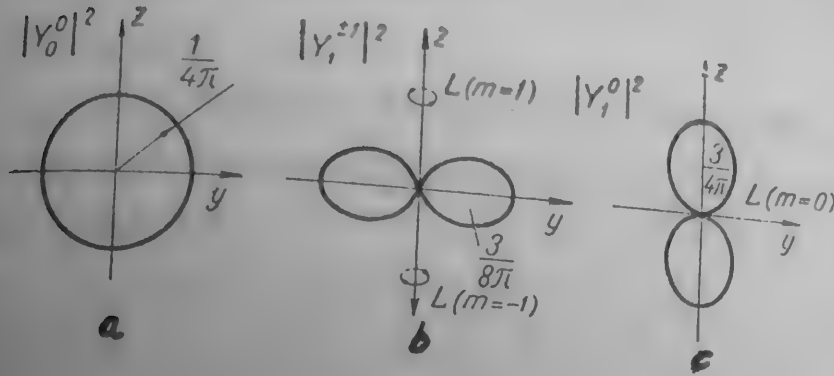
$$|Y_1^1|^2 = |Y_1^{-1}|^2 = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta \quad \text{وهي :} \quad (5.87)$$

أما عندما $m=0$ فنجد :

$$|\psi_1^0(0, \varphi)|^2 = |\psi_1^0(0)|^2 = \frac{3}{4\pi} \cos^2 \theta$$

(5.89)

وهذه التوابع مرسومة على الشكل (5.2) وليس من الصعب رسمها إذا لاحظنا تناظرها بالنسبة للمحورين θ, φ لأنه عند تبديل θ بـ $\pi - \theta$ أو φ بـ $\pi - \varphi$ لا يتغير كل من (5.87) و (5.88) وهكذا نرسم كل منهما في المجال $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ثم نأخذ النظير بالنسبة



شكل (5.2)

لـ θ و φ .
وهذه الأشكال
مرسومة في
المستوى $\varphi\theta$
وللحصول على
الشكل المقابل
في الفراغ ينبغي
تدويرها حول
المحور θ باعتبار

أن $|\psi^m|^2$

لا تتعلق بالزاوية السميتية φ ويلاحظ في الشكل a أن احتمال وجود الجسيم لا يتعلق بـ θ كما أنه لا يتبع φ ؛ أي أن كل نقط الكرة متساوية الاحتمال في الحالة s وهذا واضح لأن مربع عزم كمية الحركة $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$ ينعدم في هذه الحالة والنقطة المادية (الجسيم) الساكنة في هذه الحالة (لأن $E = T = 0$) يمكنها أن توجد في أي نقطة من الكرة .

أما عندما $m = \pm 1$ فالمواضع الأكثر احتمالا لوجود الجسيم على الكرة هي تلك التي تقع في المستوى $\varphi\theta$ ، ولنلاحظ أيضا أن الحالتين $m = +1$ و $m = -1$ لا تختلف احداها عن الأخرى إلا بجهة الدوران فالأولى تقابل دورانا موجبا (بعكس اتجاه عقارب الساعة) والثانية سالبا .

ومن أجل $m = 0$ نجد أن النقط الأكثر احتمالا هي تلك التي تمر

مستويات الحاوية لها من المحور oz (مستويات زوالية) .
يجدر بنا أخيراً أن نلاحظ أن هذه المناقشة تنطبق
على كل الحركات التي لها تناظر مركزي .

40- قواعد الانتقاء (Selection rules) :

سندرس في الفقرة التغيرات الممكنة في قيمة الأعداد الكوانتية
والتي ينتجتها يحدث الاشعاع في حالة الحركة على الكرة المدروسة
سابقاً ، فإذا تعين موضع الجسم بنصف القطر الشعاعي \vec{r} فـ Ω فإن
احتمال انتقال الجسم من مدار موصوف بالعددين الكميين l و m
الى مدار آخر موصوف بالعددين الكميين l' و m' طبقاً لنظرية
أنشتين ، يمكن أن يوصف بعنصر المصفوفة التالي :

$$\langle l', m' | r | l, m \rangle = \int (\gamma_{l', m'})^* r \gamma_{l, m} d\Omega \quad (5.89)$$

اذ أن القسم القطري من التابع الموجي يساوي مقداراً ثابتاً ، أما
 $d\Omega$ فهي عنصر الزاوية المجسة وتساوي : $d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$
ويسهل بعد حساب $\langle l', m' | r | l, m \rangle$ ايجاد تواتر الاشعاع ω وطاقته ،
ولا يحدث أي اشعاع الا عندما يختلف عنصر (المصفوفة) $\langle l', m' | r | l, m \rangle$
عن الصفر . في الحالة المدروسة سابقاً (حركة جسم على كرة) يمكن
تعين \vec{r} بالاحداثيات الجديدة التالية :

$$\left. \begin{aligned} z &= a \cos\theta \\ x &= x + iy = a \sin\theta e^{i\varphi} \\ y &= x - iy = a \sin\theta e^{-i\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (5.90)$$

واضح أن هذه الاحداثيات الجديدة تعني أنه يمكن تقسيم الحركة
الى ثلاثة أقسام :

- الأولى : حركة اهتزازية على المحور oz .
- الثانية : حركة دورانية بالاتجاه الموجب حول oz .
- الثالثة : حركة دورانية بالاتجاه السالب حول oz ، وكلتا الحركتين
الأخيرتين تحدثان في المستوى xoy ، وهكذا فإن عنصر المصفوفة
ينقسم الى ثلاثة عناصر :

$$\left. \begin{aligned} \langle l, m | Z | l', m' \rangle &= \int (Y_{l', m'})^* \cos \theta Y_{l, m} d\Omega \\ \langle l, m | \xi | l', m' \rangle &= \int (Y_{l', m'})^* \sin \theta e^{i\varphi} Y_{l, m} d\Omega \\ \langle l, m | \eta | l', m' \rangle &= \int (Y_{l', m'})^* \sin \theta e^{-i\varphi} Y_{l, m} d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (5.91)$$

حيث فرضنا للتسهيل أن الثابت a يساوي الواحد ، ولحساب عناصر المصفوفة (5.91) نستفيد من العلاقات التكرارية للتوابع الكروية :

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta Y_l^m &= A Y_{l+1}^m + B Y_{l-1}^m \\ \sin \theta e^{\pm i\varphi} Y_l^m &= A_{\pm} Y_{l+1}^{m\pm 1} + B_{\pm} Y_{l-1}^{m\pm 1} \end{aligned} \right\} \quad (5.92)$$

حيث B_{\pm}, A_{\pm}, B, A ثوابت لا تتعلق ب θ و φ فإذا بدلنا في (5.91) ولاحظنا شرط توامد التوابع الكروية وهو كالتالي : $\int (Y_{l', m'})^* Y_{l, m} d\Omega = \delta_{m, m'} \delta_{l, l'}$ فيمكن وضع (5.91) بالشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} \langle l, m | Z | l', m' \rangle &= \text{const.} \delta_{m', m} \delta_{l', l \pm 1} \\ \langle l, m | \xi | l', m' \rangle &= \text{const.} \delta_{m', m \pm 1} \delta_{l', l \pm 1} \\ \langle l, m | \eta | l', m' \rangle &= \text{const.} \delta_{m', m - 1} \delta_{l', l \pm 1} \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

وهكذا نجد بالنسبة للحركة الاهتزازية على المحور Z أن الاشعاع ممكن فقط في الحالة التي يتغير فيها العدد المغناطيسي m أما l' فيمكن أن يزيد أو ينقص بمقدار الواحد وفيما عدا ذلك فلا يحدث أي اشعاع لأن عنصر المصفوفة يساوي الصفر أي أن :

$$\Delta m = m - m' = 0, \quad \Delta l = l - l' = \pm 1 \quad (5.94)$$

أما في حالة الدوران الموجب فسيكون التغير المسموح به للعددين الكميين l, m :

$$\Delta m = -1, \quad \Delta l = \pm 1 \quad (5.95)$$

وأخيرا في حالة الدوران السالب نجد أن :

$$\Delta m = +1, \quad \Delta l = \pm 1 \quad (5.96)$$

ونخلص ما سبق بقولنا أن التغيرات المسموح بها هي :
 (5.97) $\Delta m = 0, \pm 1, \Delta l = \pm 1$
 ونذكر هنا أيضا بأن هذه القواعد الانتقائية صحيحة من أجل كل
 الحركات في الحقل المركزي وبصورة خاصة من أجل ذرة الهيدروجين .
 ويمكننا الآن حساب التواترات الممكنة للإشعاع (أو الامتصاص)
 بالعلاقة المعروفة التالية :

$$\omega_{ll'} = 2\pi \gamma_{ll'} = (E_l - E_{l'}) / \hbar \quad (5.98)$$

وبتبادل E و E' بقيمتيهما من (5.93) نجد :

$$\omega_{ll'} = \frac{\hbar}{2J} [l(l+1) - l'(l'+1)]$$

ثم ملاحظة (5.97) نجد :

$$\omega_{l, l-1} = \hbar l / J$$

(5.99)

$$\omega_{l, l+1} = -\hbar (l+1) / J$$

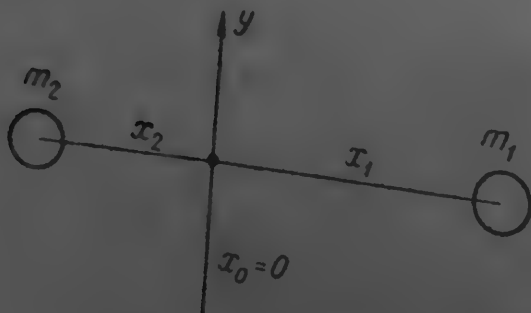
(5.100)

فالأولى توافق الانتقال من سوية طاقة إلى أخرى أدنى منها ولذلك
 كانت لها موجبة أما الثانية حيث لها سالبة فتوافق الانتقال من
 سوية طاقة إلى أخرى أعلى منها .

41 - طيفوف الجزيئات ثنائية الذرة :

(The spectra of two-atom molecule, Spectre de molecules diatomiques)

من المعلوم في الميكانيك الكلاسيكي أن دراسة حركة مجموعة
 مادية موءلفة من ذرتين في حقل مركزي (شكل 5.3) تؤول إلى
 حركة مركز الثقل وحركة نقطة مادية كتلتها هي الكتلة المختزلة
 للذرتين فإذا اعتبرنا مركز الثقل ساكنا ، (أو وضعنا مركز
 المجموعة الاحداثية في هذا المركز) ، فإن احداثيات الذرتين يمكن
 أن تكتب بدلالة الاحداثي النسبي لهما x (البعد بينهما) بالشكل
 التالي :



$$x_1 = \frac{m_2 x}{m_1 + m_2} \quad , \quad x_2 = \frac{m_1 x}{m_1 + m_2}$$

شكل (5.3)

أما عزم عطالتها :

$$J = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 \frac{m_2^2 x^2}{(m_1 + m_2)^2} + m_2 \frac{m_1^2 x^2}{(m_1 + m_2)^2} = \mu x^2 \quad (5.101)$$

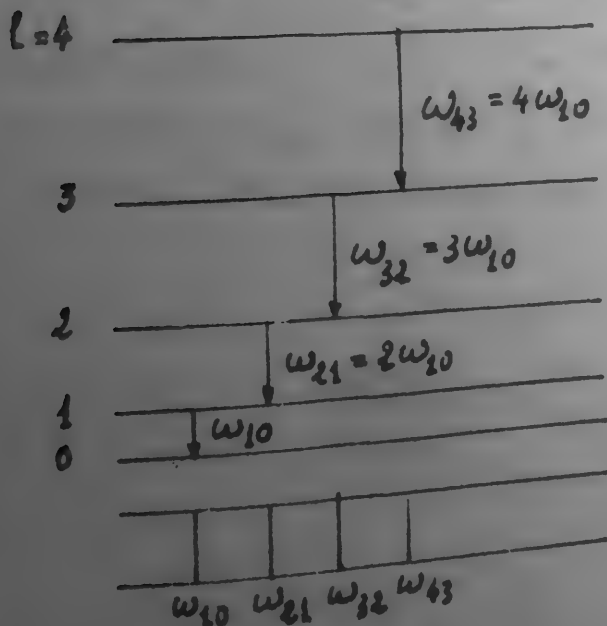
حيث $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ هي الكتلة المختزلة للذرتين ، فإذا كان البعد بين الذرتين ثابتا (a) وكان كمون التأثير المتبادل بينهما تابعا فقط لـ a أي $V(r) = V(a)$ (نأخذه مساويا الصفر) ثم نبذل ذلك فسيكون معادلة شرودنغر (5.72) فسنجد عند دراسة الطيف أنه يمكن الحصول على النتائج السابقة نفسها إذا بدلنا x من (5.101) بـ a إذ نجد مثلا بالنسبة للاشعاع الناتج عن الدوران الموجب العبارة (5.99) نفسها أي :

$$\omega_{l,l+1} = \omega_{l,l-1} = \frac{\hbar l}{J} = \frac{\hbar l}{\mu a^2} = 2B l \quad (5.102)$$

$$B = \hbar / 2J = \hbar / 2\mu a^2 \quad \text{حيث :}$$

ونلاحظ أن التواتر يتناسب طرديا مع l أما طيف الاشعاع فهو موضح على الشكل (5.4) من أجل القيم المختلفة لـ l ، لكن الخطوط الطيفية تقع على مسافات متساوية بعضها عن بعض في الطيف لأن الفرق بين تواترين متتاليين ثابت إذ أن :

$$\omega_{l,l+1} - \omega_{l,l-1} = 2B(l+1) - 2Bl = 2B = \text{ثابت}$$



شكل (5.4)

الطيف الدوراني
للجزيئات ثنائية
الذرة .

ويسهل دراسة طيف الذرات التي تتحرك بحركة اهتزازية حول وضع التوازن اذا علمنا أن تمثيل الكمون $V(r)$ بينها بالشكل (5.5)، ولكن كثيرا ما نبحث عند حل معادلة شرودنجر (بعد تبديل الكمون السابق فيها) بجوار النقطة $r=a$ (وضع التوازن) باعتبار أن الاهتزاز يتم حول هذا الوضع، ولذلك ننشر $V(r)$ في جوار النقطة a كما يلي:

$$V(r) = V(a+x) = V(a) + xV'(a) + \frac{x^2}{2!} V''(a) + \dots$$

الا أن $V'(a) = 0$ بسبب وجود النهاية الصغرى فاذا فرضنا أن:

$$V(a) = -D, \quad V'(a) = \mu \omega^2 \quad (5.103)$$

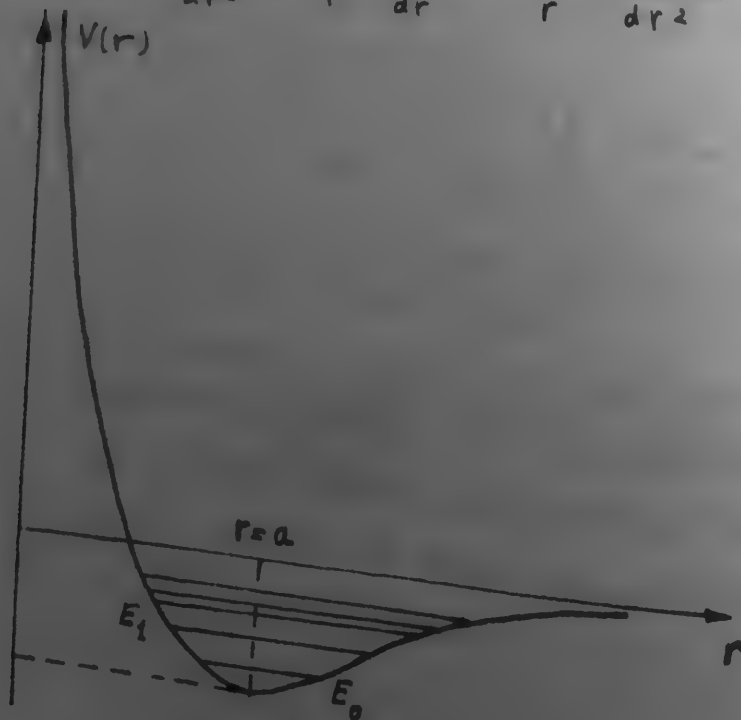
فيمكن كتابة $V(r)$ بالشكل:

$$V(r) = -D + \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 \quad (5.104)$$

ولحساب قيم الطاقة المقابلة لهذا الكمون يجب حل معادلة شرودنجر الموافقة بعد تبديل m بـ μ :

$$\nabla_r^2 R + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m r^2} \right] R = 0 \quad (5.105)$$

$$\nabla_r^2 R = \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d^2(rR)}{dr^2} \quad \text{حيث}$$



شكل (5.5)

سأحد منحولا جديدا $u=rR$ فنجد أن :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E + D - \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \right] u = 0 \quad (5.106)$$

فإذا لاحظنا أن :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(a+x)^2} \approx \frac{1}{a^2}$$

وفرضنا أن :

$$E' = E + D - B \hbar \ell(\ell+1) \quad (5.107)$$

حيث :

$$J = \mu a^2, \quad B = \hbar / 2J$$

نجد أخيرا أنه يمكن كتابة المعادلة (5.106) بالشكل التالي :

$$u'' + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E' - \frac{\mu \omega^2 r^2}{2} \right) u = 0 \quad (5.108)$$

وهي تتطابق مع معادلة الهزاز التوافقي وبالتالي فالطاقة E' تساوي :

$$E' = \hbar \omega \left(k + \frac{1}{2} \right) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.109)$$

أما الطاقة الكلية E (الدورانية والاهتزازية) فتساوي :

$$E = -D + B \hbar \ell(\ell+1) + \hbar \omega \left(k + \frac{1}{2} \right) \quad (5.110)$$

حيث يمثل الحد الأول فيها طاقة الارتباط (سالب) بين الذرتين والثاني الطاقة الدورانية والثالث الاهتزازية. ويلاحظ أن عدد مستويات الطاقة المتقطعة محدود إذ أن الجزئية لا تلبث أن تتحطم (تنقسم) عندما تتحقق المتراحة :

$$B \hbar \ell(\ell+1) + \hbar \omega \left(k + \frac{1}{2} \right) \geq D$$

وتعليل ذلك أن زيادة الطاقة الاهتزازية $k \gg 1$ يقابل زيادة سعة الاهتزاز مما يسبب انعدام التأثير المتبادل $V(r)$ بينهما (انظر الشكل (5.2) وبالتالي انقسام الجزيئة .

لنتنقل الآن لدراسة الطيف الدوراني - الاهتزازي

(*Etude du spectre de vibration-rotation*)

سنعتبر أن موضع الخطوط الطيفية يتحدد بصورة رئيسية ، بالطاقة الاشعاعية الناتجة عن الاهتزاز التي - كما تدل التجربة - أكبر بكثير من مثيلتها الدورانية (لأن أن $\lambda_{rot} = 100 \mu$ ، $\lambda_{vib} = 10 \mu$)

ماذا افننا الى ذلك أن الاشعاع يتم في حالة الاهتزاز عندما تنقص k بمقدار الواحد وفي حالة الدوران عندما تتغير l (زيادة او نقصاناً) بمقدار الواحد فيمكن كتابة تواتر الاشعاع الناتج ω' :

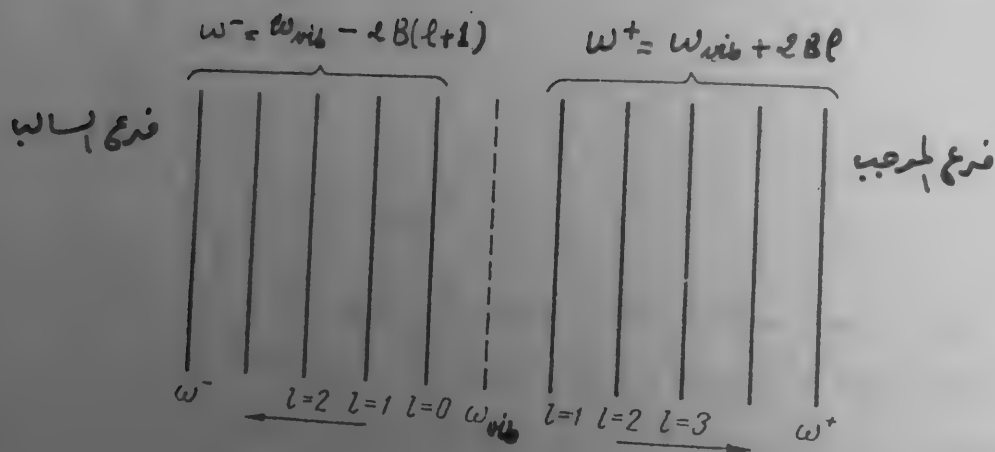
$$\omega' = [E(k, l) - E(k-1, l \pm 1)] / h \quad (5.111)$$

الذي يكتب حسب (5.110) بالشكل $\omega' = \omega + \omega_{ll'}$ حيث $\omega_{ll'}$ التواتر الناتج عن الدوران وسأخذ القيمتين:

$$\omega_{l, l-1} = 2B_l, \quad \omega_{l, l+1} = -2B(l+1)$$

ثم بالتبديل في $\omega' = \omega + \omega_{ll'}$ نجد فرعين (من أجل k معينة) موضحين على الشكل (5.6) وهما:

$$\omega^+ = \omega_{\text{مركب}} + 2B_l, \quad \omega^- = \omega_{\text{مركب}} - 2B(l+1)$$



شكل (5.6)

الطيف الاهتزازي الدوراني للجزئيات ثنائية الذرة

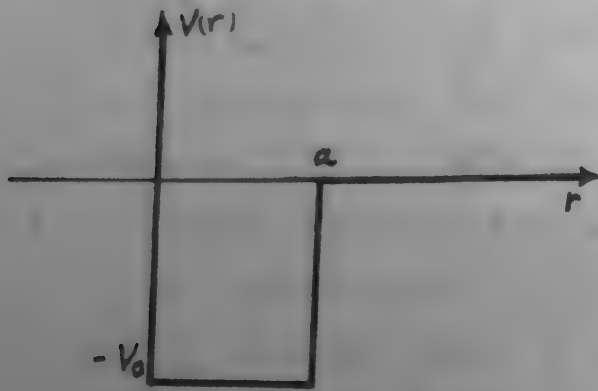
ويمكن ملاحظة هذه الطيوف الدورانية الاهتزازية عند جزئيات HCl, CO مثلاً. وأخيراً ننوه الى أن للدراسة التجريبية للطيوف السابقة أهمية كبيرة للكشف عن تركيب الجزئيات فيمكن مثلاً بقياس التواتر ω^- معرفة الشابت B وبالتالي عزم عطالة الجزئيات ومتوسط البعد بين ذرتيها.

مسائل الفصل الخامس

١ - استفد من دراستك للحركة في حقل مركزي في الحالة العامة لدراسة حركة جسيم حر في الاحداثيات الكروية . ادرس بصورة خاصة الحالة $l = 0$ (الحالة s) .

احسب التابع الموجي لهذه الحالة واحسب ثابت التنظيم .

٢ - يتحرك جسيم في حفرة الكمون التالية (شكل ٥.٦) :



$$V(r) = -V_0 \quad \text{if } r \leq a$$

$$V(r) = 0 \quad \text{if } r > a$$

شكل (٥.٦)

تحدث الحركة بحيث ينعدم العدد الكمي المداري ($l = 0$) ، عين سويات الطاقة لهذا الجسيم وناقش امكانية وجود السويات .

٣ - يوصف دوّار مستوى (Plane rotator) بالتابع

$$\psi = A \sin^2 \varphi$$

الخاص التالي :

آ - احسب ثابت التنظيم A .

ب - ما هو احتمال ظهور الحالات التالية :

$$m = 0, m = \pm 1, m = \pm 2$$

و - احسب متوسط \hat{L}_x و \hat{L}_y لهذا الدوار . بدلالة $\langle k_x | k_y \rangle$

٤ - انشر الموجة المستوية التالية

التوابع الكروية Y_l^m مع العلم أن هذه التوابع تحقق الشرط (شرط التمام أو الانغلاق) :

٥ - احسب متوسط مؤثر هاميلتون \hat{H} والمؤثر \hat{L}_x في حالة الدوار

مع العلم أن ψ هي نوابع خاصة لكل منهما . ثم احسب
 متوسط الموترين \hat{L}_x و \hat{L}_y (اللذين يتبادلان مع \hat{L}_z) .
 احسب أخيراً متوسط \hat{L}_x الذي يتبادل مع \hat{L}_z ولا يتبادل مع \hat{H} .
 6 - يطلب حل معادلة شرودنجر لجسيم يتحرك في حقل الكمون
 $V(r) = A r^2 + B/r^2$
 التالي :
 7 - أعد السؤال نفسه من أجل الحقل $V(r) = -V_0 e^{-r/a}$ وذلك في

الحالة $l=0$.
 8 - آ - برهن أن مركبات موثر الاندفاع \hat{p} بالاحداثيات

الكروية هي : $\hat{p}_r = -i\hbar(\partial/\partial r)$, $\hat{p}_\theta = -i\hbar(1/r)(\partial/\partial\theta)$, $\hat{p}_\phi = -i\hbar(1/r\sin\theta)(\partial/\partial\phi)$

ب - هل يمكن كتابة اللاپلاسيان (موثر لابلاس ∇^2) عندئذ
 بالشكل : $\nabla^2 = p_r^2 + p_\theta^2 + p_\phi^2$ ، ولماذا ؟

9 - استخدم الاحداثيات المنحنية لحساب الموتر ∇^2 في
 كل الاحداثيات الكرتيزية والقطبية والكروية .

توجيه : احسب أولاً مساقط $d\vec{r}$ على متجهات الوحدة \vec{e}_i ثم عين
 معاملات لامي h_i في كل الاحداثيات السابقة ، و احسب السطوح
 ds_i ($i=1,2,3$) للحجم العنصري dV الموءلف من التزايدات
 $d\vec{e}_i$ ثم استخدم التعريف التالي :

$$\text{div } \vec{B} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{B} \cdot \vec{\Delta s}}{\Delta V} = \frac{1}{dV} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i ds_i) dx_i$$

(حيث : $\vec{B} = \vec{\nabla} \psi$ ، ψ هو تابع ما من إحداثيات) .

10 - احسب متوسطات \hat{L}_x ، \hat{L}_y ثم احسب $\langle \hat{L}_x \hat{L}_y \rangle$ ،
 وبرهن أن $\langle \hat{L}_y^2 \rangle = \langle \hat{L}_x^2 \rangle$

11 - يدور جسم صلب حول المحور z . احسب طاقة هذا الجسم
 بدلالة \hat{L}_z ، برهن أن هذه الطاقة تعطى بالعلاقة :

$$E(m) = \frac{\hbar^2 m^2}{2I}$$

$$\psi_m = e^{im\phi}$$

وهي تقابل التابع الخاص
 حيث I عزم المعطاة حول المحور z .

١٢ - يتحرك جسيم في حقل مركزي من الشكل :

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} - \frac{c}{r^4}$$

أوجد طاقة هذا الجسيم واحسب توابعه الخاصة .



الذرات الشبيهة بالهيدروجين

كتطبيق على الحركة في حقل مركزي سندرس حركة الالكترتون في حقل النواة الكهربائي عندما تحوي النواة Z بروتوناً في الحالة العامة ولذلك فان هذه الدراسة تنطبق على كل الذرات من ابسطها الى أعقدها ولكنها أكثر توافقاً مع التجربة عندما تطبق على ذرة الهيدروجين بجميع نظائره $(^1H, ^2H, ^3H)$ والذرات الأخرى التي تحوي الكترونات أقل عدداً وذلك لأننا نهمل في هذه الدراسة تأثير الالكترونات بعضها مع بعض حول النواة ، هذا التأثير الذي يؤخذ بعين الاعتبار كتقريب من الدرجة الثانية ، عندما تحل المسألة استناداً الى نظرية الاضطراب .

ويجدر بنا أن نلاحظ التشابه من الناحية الرياضية ، بين هذه المسألة ومسألة حركة الكواكب السيارة حول الشمس (مسألة كبلر) .

44- التوابع الخاصة والقيم الخاصة (Fonctions propres, Valeurs propres) :
لنلاحظ أولاً أن الكمون الذي يخضع له الكترون في مجال نواة

شحنها الموجبة ze يساوي :

$$V = - \frac{ze^2}{r}$$

(6.1)

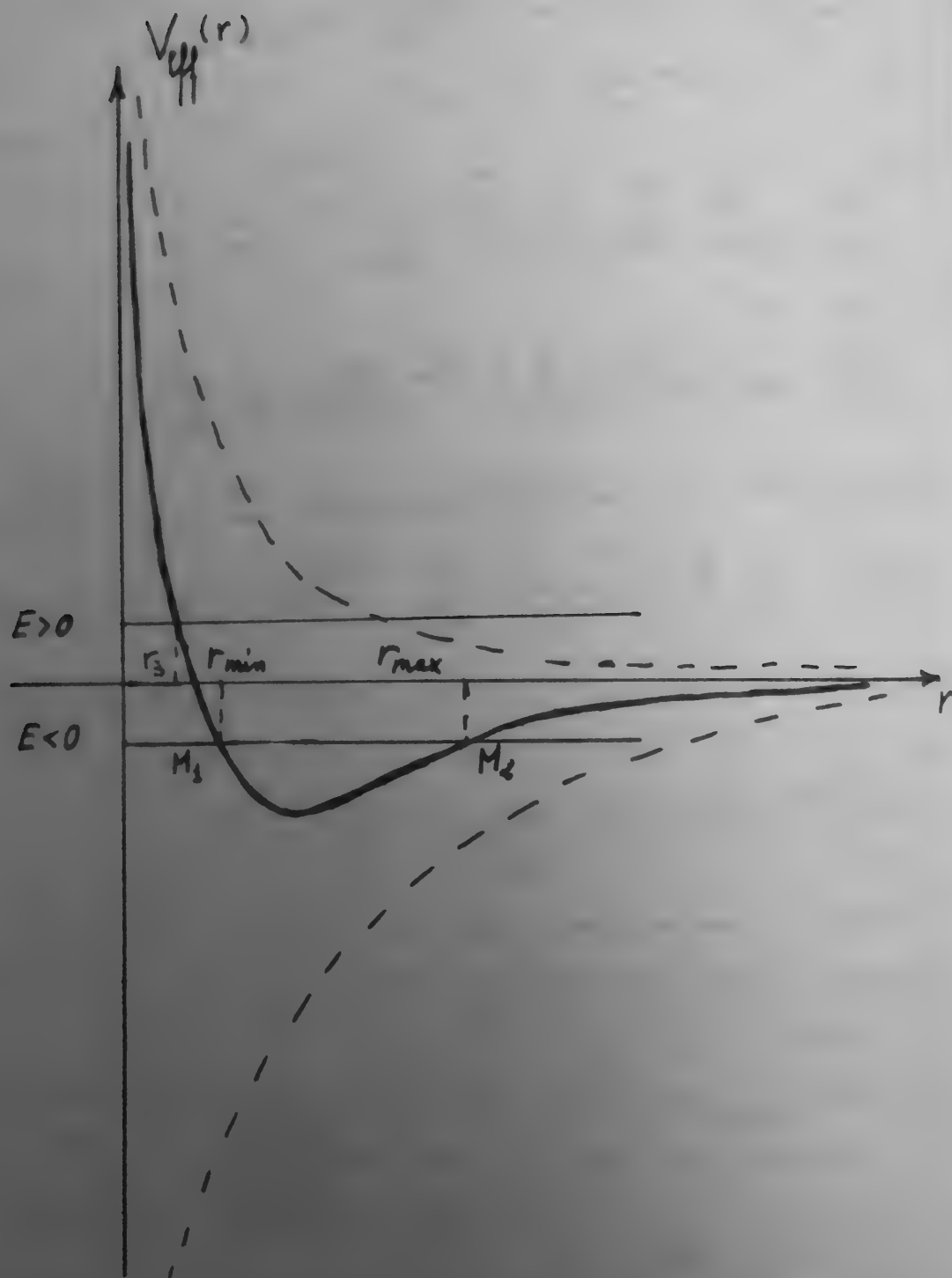
وهو يتعلق فقط بـ r من أجل نواة معينة وذلك ما يعتبر مثلاً جيداً للحركة في الحقل المركزي ، فإذا وضعنا مركز الاحداثيات في مركز النواة فإن التوابع الزاوية $Y_l^m(\theta, \varphi)$ يمكن أن تعتبر معلومة (انظر الفصل السابق) ، أما التابع القطري $R(r)$ فيمكن معرفته بعد حل المعادلة :

$$\nabla_r^2 R(r) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E + \frac{ze^2}{r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right] R(r) = 0 \quad (6.2)$$

حيث m كتلة الإلكترون ، ولحلها نفرض أن :

$$V_{eff} = - \frac{ze^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \quad (6.3)$$

ويسهل رسمه كما في الشكل (6.4) بملاحظة أنه مؤلف من فرعين نرسم كلاً منهما ثم نجمع الرسمين ويتضح مباشرة من الشكل أنه عندما تكون E (الطاقة الكلية لجسيم) أصغر من الصفر ($E < 0$) فإن الجسيم يتحرك في المجال $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ لأنها لا يمكن أن تقع على يسار النقطة $r_1 = r_{min}$ فالكُمون عندئذ سالب وهو أصغر بالقيمة المطلقة من E السالبة ، لذلك فإن المقدار $T = \frac{p^2}{2m} = E - V$ سيكون أصغر من الصفر وهذا غير ممكن ، المناقشة نفسها ، بالنسبة للنقط التي على يمين $r_2 = r_{max}$ وبالتالي فإن النقطتين M_2, M_1 تمثلان نقطتي انعطاف بالنسبة لأي جسيم يتحرك في الكُمون (6.1) حيث تكون طاقته الحركية مساوية للصفر. أما إذا كانت $E > 0$ فإن الجسيم سيتحرك في المجال $r > r_3$ والنقطة $r = r_3$ تمثل نقطة انعطاف ويكون عندها $E = V$ أي أن $T = 0$ وبما أن موضع الإلكترون في الذرة سيكون محدداً لكي يدور حول النواة باستمرار فإنه يجب أن يكون $E < 0$ ونقبل أن الحركة ستكون بين النقطتين M_2 و M_1 ونكتب معادلة شرودنجر (6.4) بالشكل :



شكل (6.1)

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[-A + \frac{2B}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (6.4)$$

حيث فرضنا: $\frac{mZe^2}{\hbar^2} = B > 0$, $-\frac{2mE}{\hbar^2} = A > 0$

لنفرض متحولاً جديداً $\rho = 2\sqrt{A} r$ ونلاحظ أن:

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = 2\sqrt{A} \frac{dR}{d\rho} = 2\sqrt{A} R'$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{dR}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left(2\sqrt{A} \frac{dR}{d\rho} \right) = 4A \frac{d^2 R}{d\rho^2}$$

وبالتبديل نجد أخيراً، بعد تقسيم طرفي المعادلة على $4A$ ، المعادلة:

$$R'' + \frac{2}{\rho} R' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{B}{\rho\sqrt{A}} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] R = 0 \quad (6.5)$$

ويمكن أن نكتبها أيضاً بالشكل:

$$\frac{d^2(R\rho)}{d\rho^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{B}{\rho\sqrt{A}} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] \rho R = 0 \quad (6.5)'$$

ولحل هذه المعادلة نفتش أولاً عن حلين خاصين عندما $r=0$, $r=\infty$ ($\rho=0$, $\rho=\infty$) ثم نبحث عن الحل العام بالشكل $R = R_\infty R_0 u(\rho)$. لنبحث أولاً عن الحل عندما $\rho \rightarrow \infty$ بالرغم أن الجسيم عندما $E < 0$ لا تصل إلى اللانهاية ولكن هذا ضروري لإيجاد الحل العام، فيمكن عندئذ إهمال بعض الحدود لصغرها أمام الحدين الباقيين وبالتالي تصبح المعادلة (6.5):

$$R''_\infty - \frac{1}{4} R_\infty = 0 \quad (6.6)$$

وحلها من الشكل:

$$R_m = c_1 e^{-p/2} + c_2 e^{p/2} \quad (6.7)$$

ان شرط محدودية التابع يحتم علينا كتابة $c_2 = 0$ وبامكاننا
ايضا اعتبار $c_1 = 1$ أما عندما $m \rightarrow 0$ فيمكن كتابة المعادلة (6.5)
بالشكل :

$$R''_0 + \frac{2}{p} R'_0 - \frac{l(l+1)}{p^2} R = 0 \quad (6.8)$$

فاذا فرضنا حلاً من الشكل $R = m^q$ واشتقينا ثم بدلنا في (6.8)
فاننا نجد أخيراً :

$$[q(q-1) + 2q - l(l+1)] m^{q-2} = [q(q+1) - l(l+1)] m^{q-2} = 0$$

ومنه نجد الحلين : $q_1 = l, q_2 = -(l+1)$ أي أن :

$$R_0 = c_1 m^l + c_2 m^{-(l+1)} \quad (6.9)$$

وهنا أيضا ينبغي أن نضع $c_2 = 0$ كي لاتصل R_0 الى اللانهاية عندما
تنتهي $m \rightarrow 0$ كما يمكن أن نضع $c_1 = 1$ باعتبار أن التابع R_0
يعتبر غير منظم حتى الآن أي :

$$R_0 = m^l \quad (6.10)$$

لنبحث الآن عن الحل العام للمعادلة (6.5)' بالشكل :

$$p R = m R_0 R_0 u = m^{l+1} e^{-p/2} u = v u \quad (6.11)$$

ولتعيين التابع المجهول u نبدل في المعادلة (6.5)' وبعد
الاشتقاق ثم التقسيم على v فنجد أخيراً :

$$u'' + 2u' \frac{v'}{v} + \left[\frac{v''}{v} - \frac{1}{4} + \frac{8}{p\sqrt{v}} - \frac{l(l+1)}{p^2} \right] u = 0 \quad (6.12)$$

فإذا لاحظنا من (6.11) أن :

$$\begin{aligned} \ln v &= -\frac{1}{2} \rho + (l+1) \ln \rho \Rightarrow \frac{v'}{v} = -\frac{1}{2} + \frac{l+1}{\rho} \Rightarrow \\ v' &= \left[-\frac{1}{2} + \frac{l+1}{\rho}\right] v \Rightarrow v'' = -\frac{l+1}{\rho^2} v + \left(-\frac{1}{2} + \frac{l+1}{\rho}\right)^2 v \Rightarrow \\ \frac{v''}{v} &= \frac{1}{4} - \frac{l+1}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}, \end{aligned}$$

وبدلنا في (6.12) نجد أخيراً المعادلة :

$$\rho u'' + [2(l+1) - \rho] u' + \left[\frac{\rho}{4} - (l+1)\right] u = 0 \quad (6.13)$$

ولحساب التابع u نفرض الحل بشكل كثير حدود بقوى ρ . إن شروط محدودية التابع الموجي عندما $\rho \rightarrow \infty$ وعندما $\rho \rightarrow 0$ تجعلنا نؤكد مسبقاً أن قوى كثيرة الحدود ستكون موجبة ومحدودة أي :

$$u = \sum_{v=0}^k a_v \rho^v \quad (6.14)$$

وبالاشتقاق والتبديل في (6.13) نجد :

$$\sum_{v=0}^k \rho^v \{ a_v \left(\frac{\rho}{4} - 1 - l - v \right) + a_{v+1} [v(v+1) + 2(v+1)(l+1)] \} = 0 \quad (6.15)$$

وهي مطابقة تعطينا a_{v+1} بدلالة a_v الذي يمكن اعتباره اختيارياً وبما أنها كثيرة حدود محدودة سيكوّن إذن : $a_{k+1} = 0, a_{k+2} = 0$ ومنه :

$$(6.16)$$

$$\frac{\rho}{4} - l - 1 = k$$

حيث n : العدد الكمي وهو أكبر من مجموع العددين الكميّين المداري l ($l = 0, 1, 2, \dots$) والقطري ($k = 0, 1, 2, \dots$) بعدد واحد ويسمى العدد الكمي الرئيسي ويساوي : $n = 1, 2, 3, \dots$ بملاحظة (6.16) التي ينتج منها أن :

$$\frac{\rho}{4} - l - 1 = k \quad (6.17)$$

$$a_v (k - v) = -a_{v+1} [(v+1)(v+2l+2)]$$

فإذا كتبنا أن $a_k = (-1)^k$ وحسبنا كل العوامل الباقية فإنه يمكن كتابة كثيرة الحدود لها (6.14) بالشكل :

$$\begin{aligned} u &= (-1)^k \left\{ \rho^k - \frac{k(k+1)}{2!} \rho^{k-1} + \frac{k(k-1)(k+1)(k+1+1)}{4!} \rho^{k-2} + \dots \right\} = \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{j!} \rho^{k-j} \frac{k!}{(k-j)! (k+1-j)!} \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$S = 2l + 1$$

حيث : $S = 2l + 1$ تسمى السلسلة (6.18) بكثيرة حدود (Laguerre) (لاغير) ويرمز لها بـ Q_k^S كما يمكن أن نكتب بالصيغة المغلقة التالية :

$$u = Q_k^S = e^{-\rho} \rho^{-S} \frac{d^k}{d\rho^k} (e^{-\rho} \rho^{k+S}) \quad (6.19)$$

وهكذا نكتب الحل العام للمعادلة (6.5) بالشكل :

$$R_{nl}(\rho) = C_{nl} e^{-\rho/2} \rho^l Q_{n-l-1}^{2l+1}(\rho) \quad (6.20)$$

حيث $\rho = 2\sqrt{A}r$ ، فإذا علمنا أن $n = B/\sqrt{A}$ أي أن $A = B^2/n^2$ نجد $B = mZe^2/\hbar^2$

$$A = \frac{m^2 Z^2 e^4}{n^2 \hbar^4} \Rightarrow 2\sqrt{A} = \frac{2mZe^2}{n\hbar^2} \quad (6.21)$$

وبالتالي فإن ρ تصبح :

$$\rho = \frac{2mZe^2}{n\hbar^2} r = \frac{2Z}{na} r \quad (6.22)$$

حيث :

$$a = \frac{\hbar^2}{mZe^2} \quad (6.23)$$

وهو ما يسمى نصف قطر مدار " بور " الأول . وأخيراً يحسب الثابت C_{nl} من شروط التنظيم فنجد :

$$C_{nl} = \left(\frac{Z}{na}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{4}{n(n-l-1)!(n+l)!}} \quad (6.24)$$

وبالتالي يمكن أن نكتب القسم القطري $R(r)$ للتابع الموجي كما بالشكل :

$$R_{nl} = \left(\frac{Z}{na}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{4}{n(n-l-1)!(n+l)!}} \left(\frac{2Zr}{na}\right)^l e^{-\frac{Zr}{na}} Q_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na}\right) \quad (6.25)$$

ولحساب القيم الخاصة للطاقة ننتقل كما هو معلوم من الشروط الحدية للتابع الموجي، تلك الشروط المعبر عنها رياضياً بالعلاقة (6.16)، فإذا بدلنا كلاً من B ، A بقيمتها المحسوبة سابقاً نجد :

$$\frac{B}{A} = \frac{\frac{mZe^2}{\hbar^2}}{\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}} = \frac{mZe^2}{\hbar\sqrt{-2mE}} = n \quad (6.26)$$

ومنـه :

$$E_n = - \frac{Z^2 e^2}{2an^2} = - \frac{R\hbar Z^2}{n^2} \quad (6.27)$$

حيث R ثابت ريدبرغ وقيمتـه :

$$R = \frac{m e^4}{2 \hbar^3} \quad (6.28)$$

وكما نلاحظ فإن هذه الطاقة تتعلق فقط بالعدد الكمي الرئيسي $n = k + l + 1$ ولا تتعلق بالعددين l و m ، وفي الوقت نفسه فإن التابع الموجي $\psi_{nlm} = R_{nl} Y_l^m$ يتعلق بكل الأعداد الكمية (n, l, m) وهذا يعني أن سويات الطاقة منطبقة، ودرجة انطباقها يمكن تعرف بسهولة بملاحظة أن العدد m يتحول من $-l$ إلى $+l$ وأن l نفسه يتحول من 0 (أصغر قيمة) إلى $n-1$ (أكبر قيمة)، لأن مجموعها ثابت يساوي $(n-1)$ إلى $(n-1)$ (أكبر قيمة) لـ l تقابل أصغر قيمة لـ k (درجة الانطباق هي :

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{+l} m = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{1}{2} [1 + 2(n-1) + 1] = n^2 \quad (6.29)$$

وهكذا نجد أن كل السويات الطاقية للجسيم المتحرك في حقل مركزي تكون منطبقة بالعدد المغناطيسي m وهذا الانطباق مرتبط بتساوي

كل الاتجاهات المارة من مركز الاحداثيات (انظر الفصل الرابع) ،
 ويجب التأكيد هنا أنه لا يوجد انطباق بالعدد الكمي l ، في نظرية
 شرودنجر الا في حالة الحقل المركزي الكولوني ، وفي معظم الحالات
 فان الانطباق ب l غير وارد ويلاحظ انقسام السوية ذات الرقم n
 الى n تحت سوية (*sous couche*) تقابل تغير l من $n-1$ (قيمة n) .
 فاذا وجدت الذرة بالاضافة الى ذلك في حقل مغناطيسي فان الانطباق
 بالعدد الكمي m سيزول أيضاً وتنقسم كل من السويات السابقة الى عدد
 من تحت السويات ، مجموعها يساوي n وبالتالي فان العدد الكلي
 لسويات الطاقة الجديدة سيصبح $n \cdot n = n^2$ سوية منفصل بعضها عن
 بعض .

43- مبدأ الانتقاء ، طيف اشعاع الذرات الشبيهة بالهيدروجين :

لايجاد مبدأ الانتقاء يجب حساب العناصر المصفوفية :

$$\langle n, l, m | \vec{r} | n', l', m' \rangle = \int \psi_{n', l', m'}^* \vec{r} \psi_{n, l, m} dV \quad (6.30)$$

حيث $\psi_{n, l, m}$ هو التابع الموجي للإلكترون حول النواة وهو مؤلف من
 قسمين زاوي وقطري وقد رأينا أن القسم الأول هو نفسه لكل الحركات
 في الحقل المركزي ويمكننا استناداً من مبدأ الانتقاء المتعلق به
 اذا كتبنا (6.30) بالشكل :

$$\langle n, l, m | \vec{r} | n', l', m' \rangle = \int d\Omega \frac{Y_{l', m'}^*}{r} \vec{r} \frac{Y_{l, m}}{r} \int_0^\infty R_{n', l'} r^3 R_{n, l} dr \quad (6.30')$$

ولاحظنا أن مركبات المتجه \vec{r} هي : $r \sin \theta \cos \varphi$, $r \sin \theta \sin \varphi$, $r \cos \theta$
 وانتقلنا الى الاحداثيات r, θ, φ فاننا سنحصل على نتائج الفصل السابق
 نفسها للعديدين الكميين m, l وهي : $\Delta m = m - m' = 0, \pm 1$, $\Delta l = l - l' = \pm 1$
 نبدل هذه القيم في (6.30)' فنجد :

$$\langle n, l, m | \vec{r} | n', l', m' \rangle = \text{const.} \begin{cases} \delta_{m', m} \\ \delta_{m', m \pm 1} \end{cases} \begin{cases} \delta_{l', l \pm 1} \end{cases} \int_0^\infty R_{n', l \pm 1} r^3 R_{n, l} dr \quad (6.31)$$

أما التكامل الأخير فيصبح بعد تبديل التابع القطري بقيمته من الشكل :

$$I = \int_0^{\infty} r^3 R_{n'l} R_{n'l} dr \sim \int_0^{\infty} r^{3+l+1} e^{-\frac{2Zr}{a}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'})} Q_{\ell}^{\ell}(\frac{2Zr}{na}) Q_{\ell}^{\ell+1}(\frac{2Zr}{na}) dr \quad (6.32)$$

حيث Q هو كثيرة حدود (Legendre) المعطاة بالعلاقة (6.19) أو (6.18) ولحساب I يجب تبديل Q بقيمتها فنحصل على جداء لكثيرتي حدود في تابع أسي ، ويمكن التأكد بسهولة أن I لايساوي الصفر من أجل أي قيمة لـ n' فنستنتج أن مبدأ الانتقال بالنسبة للعدد الكمومي الرئيسي n غير محدد أي أن n' يمكن تأخذ أي قيمة أصغر من n في حالة الاشعاع الذاتي (self spontaneous radiation) الذي سندرسه بالتفصيل الآن ولذلك سنستعمل فيما يلي الرمز : $(-E_{nl}/h) = (n\ell)$ حيث $n = 1, 2, 3, \dots$ وبالنسبة إلى ℓ فقد اصطَلحنا في الفصل السابق على كتابة الأحرف s, p, d, f, g, h, \dots التي تقابل $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ على الترتيب وبما أن : $n \geq \ell + 1$ حسب (6.16) فإن الرموز الممكنة هي : $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, 4s, 4p, 4d, 4f, 5s, 5p, 5d, 5f, 6s, \dots$ وهكذا نرى الرموز $1p$ أو $2d$ أو $3f$ غير ممكنة لأنه في الحالة الأولى تكون $n = \ell = 1$ وفي الثانية $n = \ell = 2$ وفي الثالثة $n = \ell = 3$ وفي الرابعة تكون $n = \ell = 3$ ، وهذا غير ممكن حسب (6.16) لننتقل إلى حساب تواتر الاشعاع ولذلك نستخدم الرمز السابق فنكتب :

$$\omega_{nn'} = \frac{E_n - E_{n'}}{h} = (n'\ell') - (n\ell) \quad (6.33)$$

ومن الضروري هنا ملاحظة أن $\ell' = \ell \pm 1$ فإذا عبرنا عن E بقيمتها من (6.27) نجد :

$$(n\ell) = \frac{me^4}{2h^3} \frac{Z^2}{n^2} = \frac{RZ^2}{n^2} \quad (6.34)$$

حيث R ثابتة ريدبيرغ ، ثم من (6.35) نحسب $w_{nn'}$:

$$w_{nn'} = R c^2 \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (6.33)$$

ومن هنا نجد أنه من أجل القيمة $n=1$ الموافقة لذرة الهيدروجين يمكن الحصول على سلسلة ليمان (Liman) المقابلة للانتقال الى السوية الأساسية $n'=1$ أي الى السوية 1s التي تواترها :

$$w_L = (1s) - (np) = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (6.34)$$

حيث : $n = 2, 3, 4, \dots$

أما من أجل سلسلة بالمر (Balmer) الموافقة للانتقال الى السوية الثانية $n'=2$ من مستويات أعلى ($n>2$) فنجد ثلاثة تواترات فقط (بعد ملاحظة أن l يمكن أن تزداد أو تنقص واحدا في هـ الانتقال) :

$$\left. \begin{aligned} w_B' &= (2s) - (np) \\ w_B'' &= (2p) - (ns) \\ w_B''' &= (2p) - (nd) \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

الا أن كل المستويات التي لها العدد n نفسه ستكون منطبقة بالعدد الكمي l كما رأينا في الحالة العامة (6.29) . ولذلك فان الخطوط الطيفية الثلاثة المقابلة ستكون متحدة في خط واحد هو الخط الطيفي المقابل للتواتر :

$$w_B = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (6.38)$$

وأخيراً عندما يتم الانتقال الى السوية الثالثة $n'=3$ فسيكون $n>3$

وسحصل على التواتر :

$$W_{pac} = R \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{n^2} \right)$$

(6.39)

ونسمي هذه الخطوط الطيفية المقابلة للتواترات السابقة بسلسلة باشن (Paschen) والسلاسل الثلاثة السابقة موضحة على الشكل (6.2) حيث كتبت أطوال الموجات الموافقة بالانغستروم والكمون اللازم اعطواهم
للالكترون حتى ينفصل عن النواة (كمون التأين) .

44 - تصحيح النتائج السابقة عندما تحسب حركة النواة - تطبيقات:

لقد استندت الدراسة السابقة الى قوانين الحقل المركزي باعتبار أن كتلة الجسم الجاذب لانتهائية لذلك كان يجب اجراء تصحيح ناتج عن كون النواة ليست جسمًا لانتهائي الكتلة بالنسبة الى الالكترون . لهذا يجب أن تطبق قوانين الميكانيك الكلاسيكي التي تبرهن أن الحركة بالنسبة لجسمين توؤول الى حركة جسم واحد واقع في حقل الثاني على أن نأخذ بدلاً من الكتلة m الكتلة المختزلة μ ($masse réduite$) حيث:
 $\mu = m M / (m + M)$ اعتبرنا أن كتلة m الالكترون ، M كتلة النواة فيمكن كتابة μ على الشكل :

(6.40)

$$\mu = \frac{m}{1 + \frac{m}{M}} = m \left(1 - \frac{m}{M} \right)$$

وبالتالي فان ثابت ريدبرغ المعطى بالعلاقة (6.28) سيتغير أيضا ويصبح :

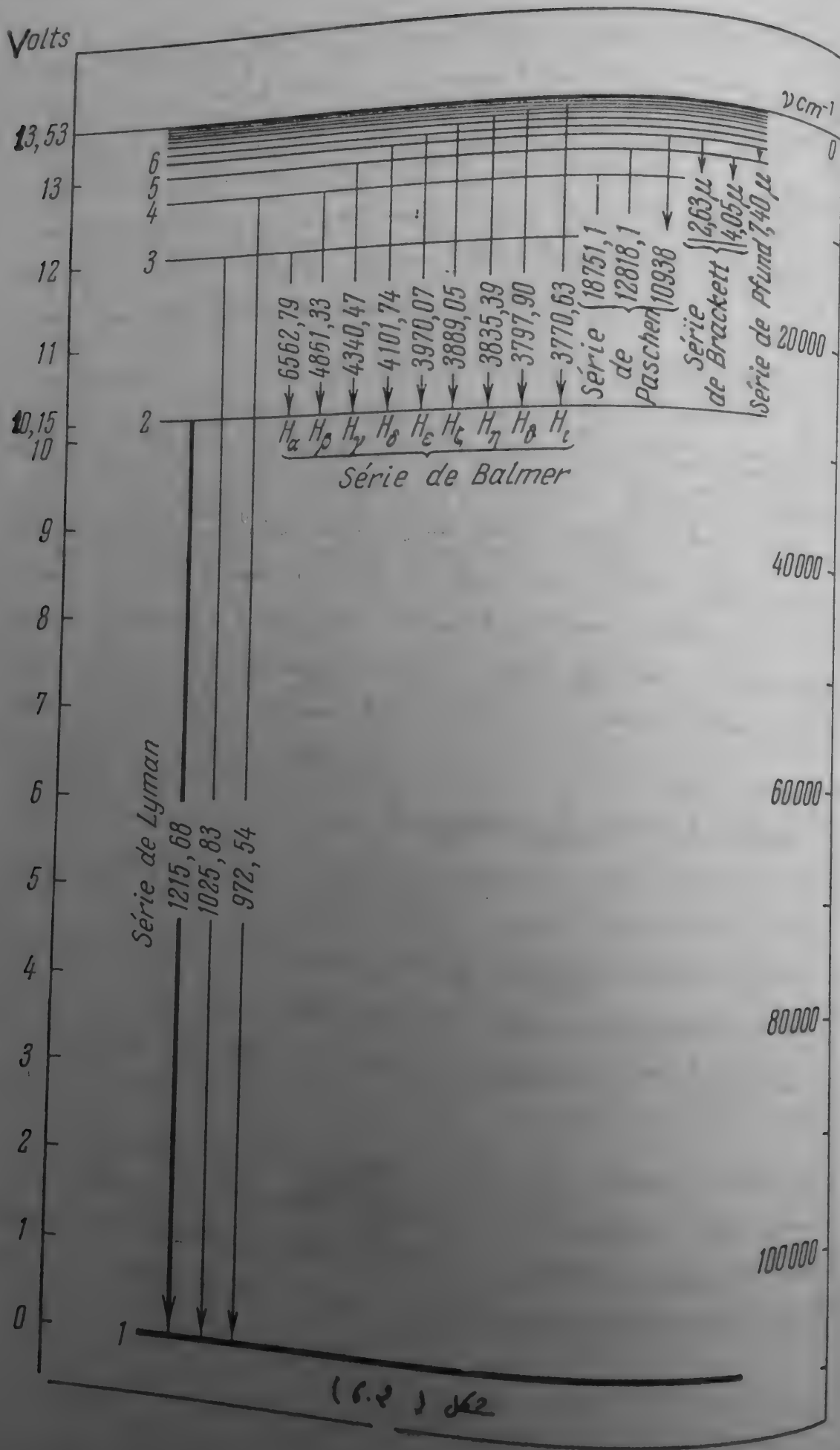
(6.41)

$$R_M = \frac{\mu c^4}{2 h^3} = R \left(1 - \frac{m}{M} \right)$$

ونتيجة لذلك سيتغير أيضا الرمز $(n\ell)$ ليصبح $(n\ell)$ يساوي :

(6.42)

$$(n\ell) = \frac{Z^2 R}{n^2} \left(1 - \frac{m}{M} \right)$$



باشن
كتبت
ساووه

ققات:

باعتبار

ساج

ن .

الحركة

ي على

(n) حيث:

النواة

مر

فا

R

(n)

وهو يختلف عن الحالة الأولى بوجود المقدار $(1.008 - \frac{m}{H})$ المتعلق بـ H .
لهذا بطرق هامة نفيدنا في تعيين الوزن الذري للعناصر ليس فقط
بالطرق الكيميائية وإنما بطرق أخرى طيفية وبفضل ذلك أمكن اثبات
وجود الهيدروجين الثقيل فمن المعلوم أن الكتلة الذرية لـ H معينة
بالنسبة للأوكسجين من خليطة تحوي كل من H^1 و H^2 وقد أمكن
قياس هذه الكتلة بواسطة مقياس الكتلة الطيفي ولوحظ أن الكتلتين
المقاستين بالطريقتين غير متساويتين إذ أن :

$$\frac{M_{ch} - M_{M.SP}}{M_{ch}} \times 100 = 0.0145 \% \quad (6.43)$$

واستناداً الى ذلك نفترض وجود نظير لـ H^1 ، هو الديتريوم D, H^2 ،
اذ ان الكتلتين يجب أن تكونا متساويتين ، لو كان هناك نوع واحد
من الهيدروجين، هذا بعد العلم أن الطريقة الطيفية (السبكتروسكوبية)
تفصل النوعين أحدهما عن الآخر لاختلافهما في الكتلة . ان الديتريوم
يتحد مع الأكسجين ليكون الماء الثقيل الذي كميته قليلة جداً فسي
الماء الطبيعي ولذلك يصعب جدا كشفه بالطرق العادية ، ولكن يمكن
كشفه بسهولة بالطرق الطيفية التي برهنت أنه يوجد في الطيف بالإضافة
الى خطوط بالمر المواقعة للتواتر:

$$W_B^H = R \left(1 - \frac{1}{1r_{40}}\right) \left(\frac{1}{2e} - \frac{1}{n_2}\right) \quad (6.44)$$

يوجد خطوط طيفية أخرى تحقق العلاقة :

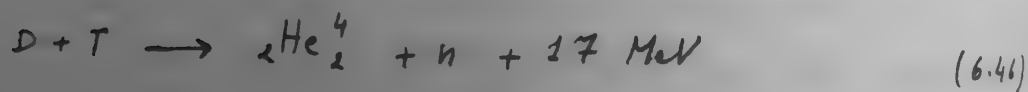
$$\omega_B^D = R \left(1 - \frac{1}{3680} \right) \left(\frac{1}{2e} - \frac{1}{ne} \right) \quad (6.45)$$

ويمكن استنتاج ذلك من العلاقة العامة (6.43) بتبديل z بـ l و M بـ $2M$ لأن كتلة نواة الديتريوم تساوي ضعف كتلة نواة الهيدروجين العادي .

ان الاختلاف في الكتلة ما بين H^1 ، H^2 ، يتبعه اختلاف في الخواص الفيزيائية والكيميائية. لنوعي الماء المقابلين لكل منهما ويكون هذا الاختلاف هنا أشد منه بكثير بين النظائر المختلفة لبقية العناصر ، ونذكر من هذه الخواص أن D_2O يغلي في الدرجة $101.4^\circ C$ مقارنة بـ

مري واحد ويتجمد في الدرجة 3.81° كما أنه لرج جداً وأقل اداية
للمح العادي ، وقد أصبح له استعمالات هامة بعد تطوير الفيزياء
النوية ، فهو مبطيء مثالي للنترونات السريعة كما يستخدم للحصول
على الديتريوم .

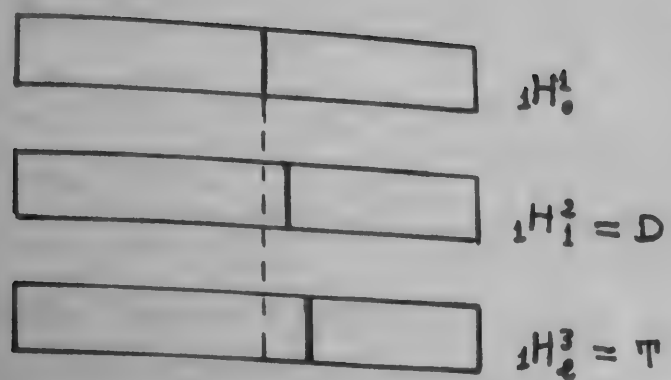
وأخيراً لابد من الإشارة الى نظير آخر للهيدروجين اكتشف فيما
بعد هو T_2 H_2^3 الهيدروجين الثالث (التريتيوم) الذي تحوي نواته
على بروتون واحد ونيوترونين والذي عند اتحاده مع الأوكسجين يكون
الماء الثالث T_2O وهو قليل جداً لا تتجاوز نسبته 10^{-8} في الماء
الطبيعي ، أما نسبة عدد ذراته الى ذرات الديتريوم فتساوي (1/6400)
ولكن الأهمية الخاصة لهذا العنصر هو أنه أمل البشرية لإيجاد الطاقة
في المستقبل عن طريق تحقيق تفاعلات الالتحام ، فمن المعلوم
أن تفاعله مع الديتريوم يعطينا ذرة هليوم ونيوترون وكمية
كبيرة من الطاقة :



ولتحقيق هذا التفاعل لابد من رفع درجة حرارة الخليط الى ما يقارب
 10^8 درجة مئوية لكي يتم التغلب على الحاجز الكولوني للنواتين
وجعلهما تلتحمان وهذا ما يتحقق في عصرنا عن طريق القنبلة الذرية
التي تكون بمثابة عود الثقاب لتحقيق الالتحام .
كما أن هناك استعمالات أخرى للتريتيوم (H_2^3) في بعض الأبحاث
الكيميائية والبيولوجية باعتباره عنصراً مشعاً .
ان الخطوط الطيفية للتريتيوم المقابلة لسلسلة بالمر مزاحمة
الى اليمين أيضاً بسبب الكتلة . أما تواتراتها فتحقق العلاقة :

$$W_B^T = R \left(1 - \frac{1}{35450} \right) \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (6.47)$$

والشكل (6.4) يبين موضع الخطوط الطيفية المقابلة لكل من الهيدروجين
العادي والديتريوم والتريتيوم .



شکل (6.3)



مسائل الفصل السادس

- ١ - يتحرك الكترون ضمن حقل كهربائي لنواة شحنتها Ze بحيث تكون طاقته الكلية سالبة $E < 0$. برهن أن هذا الالكترون يجب أن يتحرك ضمن المجال $r_1 \leq r \leq r_2$ حيث r_1, r_2 أصغر بعد وأكبر بعد، على الترتيب عن مركز النواة الذي يعتبر مركزاً للاحداثيات .
- ٢ - لتكن ذرة الهيدروجين الموجودة في الحالة الأساسية $(n=1)$ ،

احسب :

آ - احتمال وجود الكترون هذه الذرة ضمن كرة قطرها a حيث a نصف قطر مدار بور الأول .

ب - احتمال وجود الالكترون خارج هذه الكرة . ثم احسب نسبة هذين الاحتمالين مع العلم أن التابع الموجي الذي يصف الالكترون في هذه الحالة هو :

$$\psi_{100} = (1/\sqrt{\pi a^3}) e^{-r/a}$$

٣ - ليكن الكترون ذرة الهيدروجين الواقع على مدار محدد بالعدد الكوانتي $n=2$ في الحالة p والمطلوب :

آ - احسب متوسط المقدار $1/r^3$ حيث r بعد الالكترون في مركز

النواة .

ب - اذا فرضنا أن الحقل المغناطيسي الناتج عن دوران الالكترون السابق يعطى بالعلاقة الكلاسيكية :

$$\vec{B} = \frac{e}{mc} \frac{1}{r^3} (\vec{r} \times \hat{p})$$

فاحسب متوسط هذا الحقل في مركز النواة .

٤ - يرمز للقسم القطري للتابع الموجي الذي يصف ذرة الهيدروجين بالرمز $R_{nl}(n)$ العدد الكمي الرئيسي ، l العدد الكمي المداري .

آ - ماهي التوابع الممكنة اذا كان $n=1,2,3$.

ب - احسب النهاية العظمى للكثافة الاجمالية $D=r^2 R^2$ لتوضع

الالكترون حول نواة ذرة الهيدروجين في الحالة $1s, 2p, 3d$ وبرهن انها تقع على أبعاد $a_0, 4a_0, 9a_0$ ، على الترتيب من مركز النواة .

٥ - ليكن التابع الموجي لذرة الهيدروجين المميز بالاعداد الكوانتية m, l حيث $l = n-1, m=l$ (حالة خاصة) . فاذا علمت أن كلاً

من القسم القطري والقسم الزاوي يعطيان بالعلاقتين ، (على الترتيب)

$$R_{nl} = e^{-r/na_0} [c_0 r^l + c_1 r^{l+1} + \dots + c_{n-l-1} r^{n-l-1}]$$

$$Y_l^m = |l, l\rangle = A \sin^l \theta e^{il\phi}$$

حيث c_i و A ثوابت ، فاحسب :

- أ - قيمتي كل من r و θ التي من أجلها يكون الاحتمال القطري والزاوي على الترتيب ، لوجود الإلكترون حول النواة أعظمياً .
- ب - المناطق التي تكون فيها كثافة الاحتمال $|\psi_{nlm}|^2$ أعظمية .
- 6 - أحسب ثابت التنظيم C للتابع الذي يصف إلكترون ذرة الهيدروجين في الحالة الأساسية 1s مع العلم أن هذا التابع يعطى بالعلاقة : $\psi = C e^{-r/na_0}$
- 7 - أحسب مركبات كثافة التيار الاحتمالي للإلكترون ذرة الهيدروجين في الحالة العامة .

- 8 - ليكن إلكترون ذرة الهيدروجين في الحالة الأساسية ($n=1$) .
- أ - أحسب قيمة r التي يكون من أجلها احتمال وجود الإلكترون أعظمياً ، ثم أحسب قيمة هذا الاحتمال على بعد $\frac{3a_0}{2}$ من مركز النواة .
- ما هو البعد الذي ينعدم عنده الاحتمال المذكور ؟
- ب - برهن أن علاقات الشك $\Delta r \Delta p$ تتحقق من أجل هذه الحالة الأساسية .

- ج - عين النقط التي يكون فيها احتمال وجود الإلكترون في المستوى xz أعظمياً في الحالات 2s و 2p عندما تكون $m = \pm 1$.
- 9 - أحسب القسم القطري من التابع الموجي الذي يصف ذرة الهيدروجين ن أجل $n=1, 2, 3$ وبرهن أنك تحصل على ما يلي :

$$R_{10} = 2N e^{-\rho/2} \quad , \quad R_{20} = \frac{1}{2\sqrt{2}} N e^{-\rho/2} (2-\rho) \quad , \quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{6}} N e^{-\rho/2} \rho$$

$$R_{30} = \frac{1}{9\sqrt{3}} N e^{-\rho/2} (6-6\rho+\rho^2) \quad , \quad R_{31} = \frac{1}{9\sqrt{6}} N e^{-\rho/2} \rho(4-\rho)$$

$$R_{32} = \frac{1}{9\sqrt{3}} N e^{-\rho/2} \rho^2$$

حيث $N = \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2}$ ، $\rho = \frac{Zr}{na_0}$ ثم برهن أن كل هذه التوابع تحقق الشرط

- 10 - أحسب متوسط الكمون الذي يتأثر به الإلكترون في الحالة الأساسية لذرة الهيدروجين .

الفصل السابع

الحركة في حقل مغناطيسي - سبين الإلكترون

45 - مقدمة :

لقد وجدنا عند دراستنا لذرة الهيدروجين أن مجموعة الأشعة $\{ |n, \ell, m, \ell\rangle \}$ (حيث : n العدد الكمي الرئيسي ، ℓ العدد الكمي المداري ، m العدد الكمي المغناطيسي) ، تصف حالة الجملة تماماً . ويمكن دراسة طيف هذه الذرة أو الذرات الأخرى وتفسير وجودها نظرياً استناداً إلى هذه الأشعة ، ولكن مع التطور التقني الكبير لتحليل الطيفي وجد : أولاً أن للخطوط الطيفية عرضاً كبيراً نوعاً ما وليس كما هو متوقعاً أن يقابل الفوتون المنطلق ، عند انتقال الجملة من حالة إلى أخرى ، طول موجة وحيد ، أي خطأ طيفياً ضيقاً جداً ، وثانياً أن الكثير من خطوط الطيف ، التي يبدو أنها تتجاوب مع أحد أطوال الموجة هي في الحقيقة موءلفة من عدد من الخطوط القريبة بعضها من بعض ، يمكن فصل هذه الخطوط بتطبيق دقل تحريض مغناطيسي على الجملة . تدعى ظاهرة فصل الخطوط الطيفية بتطبيق دقل تحريض مغناطيسي بمفعول زيمان (Effel Zeeman) نسبة إلى العالم الهولندي زيمان الذي لاحظها عام (1896) .

سنقوم في البداية بتفسير كون خطوط الطيف عريضة . في الحقيقة ، اذا تحددت سوية طاقة الإلكترون الأولية وسوية طاقته النهائية ، فان الفرق بينهما يكون محدداً تماماً ، ولكن انتقال الإلكترون بين سويتي الطاقة يعني اخلافاً في الاستقرار . بفرض أن Δt الزمن الذي يمضيه الإلكترون في الذرة وهو في حالة الاستقرار. أن Δt يرتبط بطاقة الانتقال ΔE بعلاقة عدم التعيين لهايزنبرغ :

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \Rightarrow \Delta E \sim \hbar / \Delta t \quad (7.1)$$

فكلما كانت فترة استقرار الإلكترون في الذرة صغيرة كانت خطوط الطيف الضوئي ، التي تناظر انتقاله من حالة الى أخرى ، أعرض . بذلك نكون قد فسرنا سبب كون خطوط الطيف عريضة ، أما سبب كون الخطوط الطيفية موءلفة من عدد من الخطوط القريبة بعضها من بعض فيعود الى ادخال مفهوم كمي بحث هو السبين الذي برهن على وجوده بتجربة شترن - غيرلاخ التي سندرسها في الفقرة التالية .

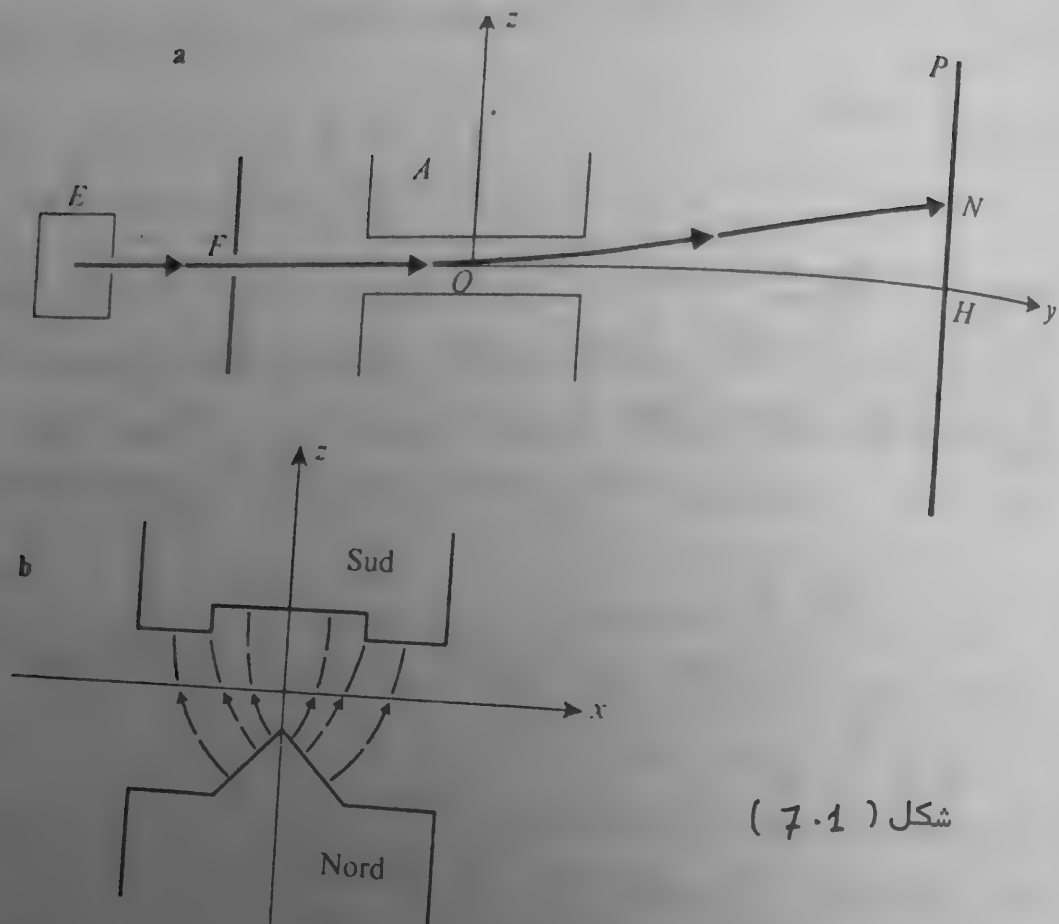
46 - تجربة شترن - غيرلاخ (Stern-Gerlach)

تدرس تجربة شترن - غيرلاخ انحراف حزمة من الذرات المتعادلة كهربائياً ذات المغنطة الطردية (ذرات الفضة Ag) تحت تأثير حقل تحريض مغناطيسي غير متجانس .

بتسخين الوعاء E ، الذي يحوي ذرات الفضة، الى درجة حرارة عالية ، تخرج هذه الذرات من ثقب صغير فيه وتوجه وفق المحور OY بواسطة فتحة F ، ومن ثم تمرر ^ب قطبي مغناطيسي كهربائي A لتسقط أخيراً على الصفيحة P ، انظر الشكل (7.1a) .

يجب أن نوضح هنا أن للمغناطيس الكهربائي A مستوى تناظر (المستوى XOY في تجربتنا) وأن أقطابه موازية تماماً للمحور OY (أي أن حقل التحريض المغناطيسي ليس له مركبة على المحور OY) . يبين الشكل (7.1b) خطوط حقل التحريض المغناطيسي B_z حيث أن مركبة B_z (حسب المحور OZ) تتغير بشدة .

قبل أن نعطي نتيجة التجربة لنحاول أن نتوقعها باستخدام
النظرية الكلاسيكية .



شكل (7.1)

47 - دراسة كلاسيكية :

تولد حركة الإلكترون الدورانية ، حول النواة في الذرة ، عزمًا
مغناطيسيًا $\vec{\mu}$ ملر لهذه الذرة مساويًا الى شدة التيار i الناتج عن
حركة الإلكترون مضروبًا في سطح الدائرة S التي يرسمها أثناء حركة :
$$\vec{\mu} = i \cdot S \cdot \vec{n}$$

(7.2)

حيث \vec{n} الناظم على سطح الدائرة. وتعطى شدة التيار بدلالة سرعة الحركة الزاوية ω والشحنة q بالعلاقة:

$$i = \frac{q}{2\pi} \omega \quad (7.3)$$

أما سطح الدائرة فيعطى بدلالة نصف قطرها بالعلاقة:

$$S = \pi r^2 \quad (7.4)$$

فتكون القيمة العددية للعزم المغناطيسي:

$$\mu = \frac{q\omega r^2}{2} \quad (7.5)$$

من جهة أخرى ان للالكترون عزم اندفاع مداري \vec{L} بسبب حركته المدارية حول النواة، تعطى قيمته العددية بدلالة كتلة الالكترون m وسرعته الخطية v ونصف قطر الدائرة r بالعلاقة:

$$L = m r v \quad (7.6)$$

وترتبط السرعة الخطية v بالسرعة الزاوية ω بالعلاقة:

$$v = r \omega \quad (7.7)$$

فتصبح قيمة عزم الاندفاع المداري:

$$L = m r^2 \omega \quad (7.8)$$

بمقارنة العلاقتين (7.5) و (7.8) نجد أنه يمكننا كتابة العزم المغناطيسي μ بدلالة عزم الاندفاع المداري L :

$$\mu = \frac{q}{2m} L = \gamma L = \frac{\mu_B}{\hbar} L \quad (7.9)$$

تسمى $\gamma = \frac{q}{2m}$ النسبة الجيرومغناطيسية، ويسمى $\mu_B = \frac{q\hbar}{2m}$ مغنيتون بور (Magnetron de Bohr).

تتأثر ذرات الفضة، التي تتواجد في حقل تحريض مغناطيسي بقوة مشتقة من طاقة كامنة W حيث:

$$W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (7.10)$$

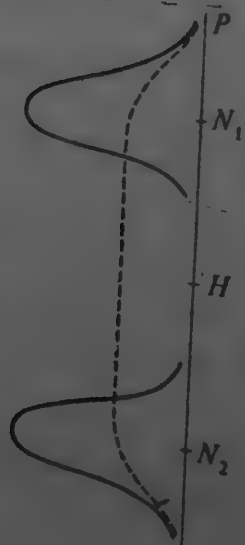
وذلك بملاحظة أن قوة لابلاس معدومة لأن ذرات الفضة متعادلة كهربائياً ، وبالتالي تكون القوة التي تخضع لها ذرات الفضة هي :

$$\vec{F} = -\text{grad } W = \text{grad } \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (7.11)$$

بالعودة الى شكل المغناطيسي الكهربائي μ_A (انظر الشكل 7.16) نجد أن المركبة الوحيدة لحقل التحريض المغناطيسي التي تولد القوة وبالتالي تصبح القوة :

$$F = F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (7.12)$$

نلاحظ أن القوة تتناسب مع μ_z أو مع L_z حسب (7.9) ، وبالتالي فإن قياس الانحراف HN على المقياس P الناتج عن القوة F يعود الى قياس μ_z أو قياس L_z ، وبما أن حزمة الذرات التي تدخل ما بين قطبي المغناطيس الكهربائي A ، يمكن أن تأخذ جميع الاتجاهات اذن يمكن لـ μ_z أن تأخذ جميع القيم المحصورة بين $+\mu$ و $-\mu$. وهكذا يجب أن نحصل على بقعة واحدة متناظرة بالنسبة للنقطة H . وهذا ما يوضحه الخط المنقط في الشكل (7.2) .



شكل (7.2) يتجه العزم المغناطيسي $\vec{\mu}$ لذررات الفضة الخارجة من الوعاء E في جميع الاتجاهات وبشكل عشوائي لذلك فإن الميكانيك الكلاسيكي يتوقع أن قياس μ_z يعطي وباحتمالات متساوية جميع القيم المحصورة بين $+\mu$ و $-\mu$ ، وهكذا يجب أن نحصل على بقعة واحدة متمركزة في H (الخط المنقط) ، ولكن نتيجة التجربة تعطينا بقعتين متمركزتين في N_1 و N_2 (الخط المتمثل) .

48 - دراسة كوانتية :

ان نتائج التجربة ، التي أجريت للمرة الأولى من قبل شتيرن وغيرلاخ عام 1921، مناقضة لتوقعات الميكانيك الكلاسيكي ، فبدلاً من ملاحظة بقعة واحدة متمركزة في H ، فاننا نلاحظ بقعتين متمركزتين في N_1 و N_2 (الخط المتصل في الشكل 7.2) .

لقد فشل الميكانيك الكلاسيكي في توقعاته لنتائج تجربة شتيرن وغيرلاخ ، فلنبحث فيما اذا كان باستطاعة ميكانيك الكم تفسيرها. وجدنا سابقاً أن الطاقة الكامنة للذرات بوجود حقل تحريض مغناطيسي تعطى بالعلاقة :

$$\hat{W} = -\mu_z B_z = -\frac{q}{2m} B_z \hat{L}_z = \frac{e B_z}{2m} \hat{L}_z \quad (7.13)$$

حيث $e = -q$ شحنة الالكترون ، وبالتالي فان الهاملتوني الكلي للجملة \hat{H} هو :

$$\hat{H} = \hat{H}_n + \hat{W} = \hat{H}_n + \frac{e B_z}{2m} \hat{L}_z \quad (7.14)$$

حيث يمثل \hat{H}_n هاملتوني الجملة قبل تطبيق حقل التحريض المغناطيسي. ان مجموعة المؤثرات $\{\hat{H}_n, \hat{L}_x, \hat{L}_y\}$ تقبل التبادل فيما بينها مثنى مثنى وهذا يعني أن لها مجموعة كاملة من الأشعة الخاصة المشتركة وهي: $\{|n, l, m\rangle\}$ اذن فهي أشعة خاصة للهاملتوني الكلي للجملة \hat{H} :

$$\begin{aligned} \hat{H} |n, l, m\rangle &= \left(\hat{H}_n + \frac{e B_z}{2m} \hat{L}_z \right) |n, l, m\rangle = \\ &= \left(E_n + \frac{e B_z}{2m} m \hbar \right) |n, l, m\rangle \end{aligned} \quad (7.15)$$

مقابلة للقيم الخاصة :

$$E_{n,m_l} = E_n + \frac{e\hbar g}{2m} m_l \hbar \quad (7.16)$$

حيث E_n سويات طاقة ذرة الغضة في حالة غياب حقل التحريض المغناطيسي .

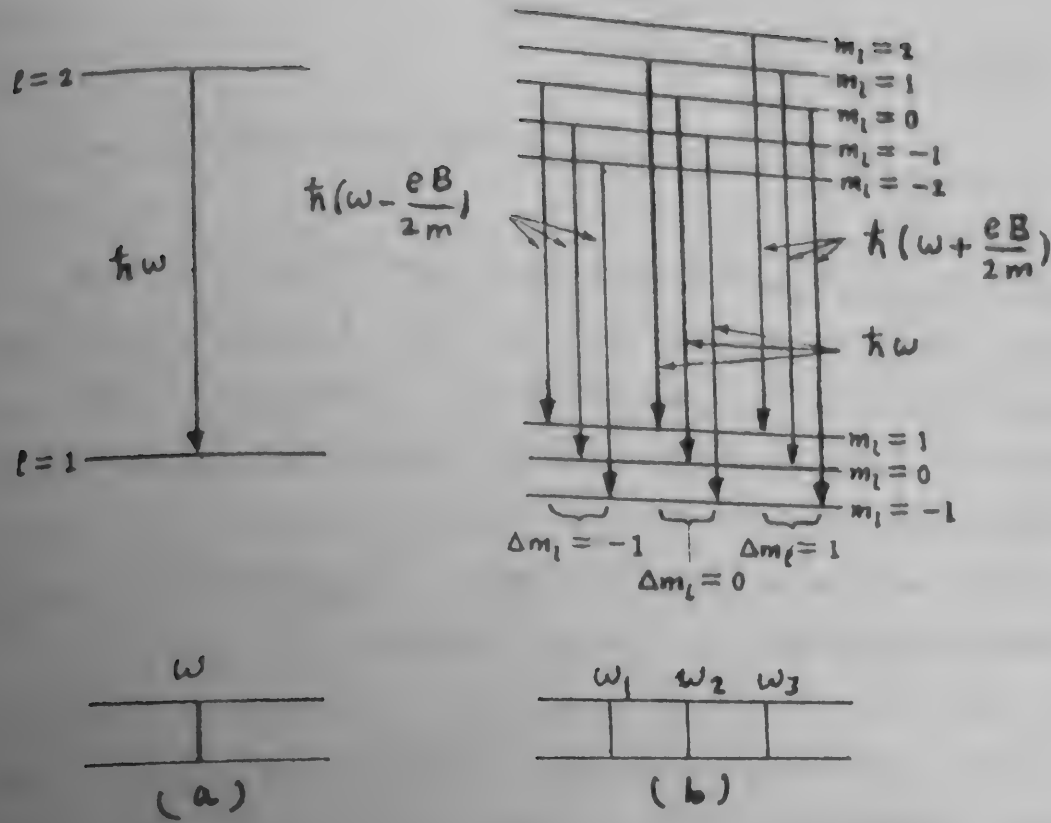
نعلم انه من أجل قيمة معينة للعدد الكمي الرئيسي n فان العدد الكمي المداري l يأخذ n قيمة مختلفة هي: $l = 0, 1, \dots, n-1$ حيث $|\Delta l| = 1$ ، وأن العدد الكمي المغناطيسي m_l يأخذ $(2l+1)$ قيمة مختلفة من أجل قيمة معينة لـ l : $-l \leq m_l \leq +l$ و $|\Delta m| = 1$. إذن من أجل قيمتين معينتين لـ n و l فان سوية الطاقة (7.16) تنقسم الى $(2l+1)$ سوية جزئية يقابل كل منها قيمة ممكنة لـ m_l .
نعلم أيضا أن الانتقال بين حالتين كموميتين مختلفتين يخضع لقواعد الانتقاء $\Delta l = \pm 1$ و $\Delta m = 0, \pm 1$ وذلك مهما يكن العددان الكميان الرئيسيان n و n' المميزان للحالتين . وهذا يقتضي بأن مفعول زيمان يؤول الى انقسام الخط الطيفي ، الناتج عن انتقال الجملة بين السويتين E_i و E_f ذي التواتر $\omega = (E_f - E_i)/\hbar$ الى ثلاث مركبات تواتراتها الزاوية هي كما يلي في الشكل (7.8) :

$$\omega_1 = \omega + \frac{e\hbar g}{2m} \quad (7.17a)$$

$$\omega_2 = \omega \quad (7.17b)$$

$$\omega_3 = \omega - \frac{e\hbar g}{2m} \quad (7.17c)$$

لقد تم تجريبياً ملاحظة مفعول زيمان : انقسام الخطوط الطيفية لدى وضع الذرة في حقل تحريض مغناطيسي ، ولكن يمكن في كثير من الأحيان ظهور أربع أو أكثر من المركبات الطيفية بدلاً من ظهور ثلاث مركبات كما تتوقع النظرية الكمومية ، وحتى في حالة ظهور ثلاث مركبات فان المسافات الفاصلة بينها لا تتفق مع العلاقات



شكل (7.3)

انقسام الخط الطيفي بوجود حقل تحريض مغناطيسي من أجل $l=1, 0, 1$.
(a) الطيف بغياب الحقل، (b) الطيف بوجود الحقل.

(7.17). بالإضافة الى ذلك فانه حتى ولو لم نطبق حقل تحريض مغناطيسي على الذرة ، فاننا نلاحظ أن الخطوط الطيفية للذرات شبه الهيدروجينية والقلوية لا تتفق مع النظرية ، حيث تتوقع النظرية وجود خطوط طيفية مفردة ($n=1, l=m_l=0$) ، ولكن نلاحظ أن معظم الخطوط الطيفية مزدوجة وتتركب من خطين منفصلين قريبين جداً أحدهما من الآخر مثل الخطين الأصفرين في طيف الصوديوم (Na) وهما يوافقان طولي موجة مقدارهما $\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$ و $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$.

49 - محاولة ترميم النظرية الكمومية - مسلمات باولي :

لقد فشلت النظرية الكمومية ، كما رأينا سابقاً ، في تفسير

مفعول زيمان ، وفي محاولة للخروج من هذه المشكلة فقد اقتصر
أوهلينبيك وغود شميت (Vehelenbeck et Goudmit) عام 1925 الفرضية
التالية :

الالكترون حول نفسه (من الانكليزية : spin) ،
وهذا الدوران يكسبه عزما حركيا ذاتيا نسميه السبين ونرمز له
بالحرف \vec{S} .

ولتفسير النتائج التجريبية نقبل بأنه يرتبط بالعزم الحركي
السبيني \vec{S} عزم مغناطيسي سبيني $\vec{\mu}_s$ معطى بالعلاقة :

$$\vec{\mu}_s = \frac{e\hbar}{4m} \vec{S} \quad (7.18)$$

بمقارنة العلاقتين (7.9) و (7.18) نلاحظ أن العزم المغناطيسي السبيني
 $\vec{\mu}_s$ يساوي ضعفي العزم المغناطيسي المداري $\vec{\mu}_l$ * .

لقد أوضح باولي (Pauli) هذه الفرضية وأعطى للسبين وصفا كموميا
في حدود النظرية الكمومية غير النسبية وذلك بوضعه مجموعة من
المسلمات ، وهكذا يجب أن يضاف الى مسلمات ميكانيك الكم التي
اعطيت سابقا ، المتعلقة بالموضع \vec{r} وبالاندفاع \vec{p} ، مسلمات
باولي التالية التي تتعلق بالسبين .

المسلمة (1)

ان المؤثر \vec{S} هو عبارة عن عزم حركي ذاتي ، هذا يعني أن
مركباته على المحاور الاحداثية \hat{S}_x ، \hat{S}_y ، \hat{S}_z تحقق علاقات التبادل

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad \text{التالية :}$$

$$[S_y, S_z] = i\hbar S_x \quad (7.19a)$$

$$[S_z, S_x] = i\hbar S_y \quad (7.19b)$$

$$(7.19c)$$

* عندما ندرس التفاعل بين الالكترون والحقل الكهرومغناطيسي المكتم ، في
الالكتروديناميك الكمومي ، فاننا نجد أن ثابت التناسب بين $\vec{\mu}_s$ و \vec{S}

يختلف بمقدار 10^3 عن $e\hbar/4m$.

المسلمة (٢)

يشكل الموءثران \hat{S}_z ، \hat{S}^2 مجموعة كاملة من الملحوظات الفيزيائية التي تقبل التبادل فيما بينها في فضاء السبين المكسور من الأشعة الخاصة المشتركة لكل منهما ولتكن $\{|s, m_s\rangle\}$ ، ويحققان العلاقتين التاليتين :

$$\hat{S}^2 |s, m_s\rangle = s(s+1) \hbar^2 |s, m_s\rangle \quad (7.10a)$$

$$\hat{S}_z |s, m_s\rangle = m_s \hbar |s, m_s\rangle \quad (7.10b)$$

وحسب النظرية العامة للعزم الحركي فان s يمكن أن تكون امسا عدداً صحيحاً أو نصف عدد صحيح ، وأن m_s تأخذ جميع القيم المحصورة بين $+s$ و $-s$ بحيث يكون الفرق بين قمتين متتاليتين لها هو الواحد ($s \leq m_s \leq -s$ و $\Delta m_s = 1$) . نستطيع اذن أن نميز جسماً ما بالعدد s فنقول أنه جسيم ذو سبين s . وهكذا يتكون الفضاء السبيني من $(2s+1)$ حالة . هذه الحالات عبارة عن أشعة خاصة للموءثر \hat{S}^2 تقابل القيمة الخاصة نفسها : $s(s+1)\hbar^2$.

المسلمة (3)

ان فضاء الحالات للجسيم هو عبارة عن الجداء التنسوري لفضاء التوابع التربيعية المكاملة والفضاء السبيني وبذلك يكون الشعاع الممثل للجسيم في هذا الفضاء هو :

$$|n, l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle = |n, l, m_l, s, m_s\rangle \quad (7.11)$$

هذا يعني أيضا أن كل ملحوظ فيزيائي سبيني يقبل التبادل مع أي ملحوظ فيزيائي مداري .

المسلمة (4)

ان لالكترون سبيناً مساوياً نصف ($s = 1/2$) وعزماً مغناطيسياً

سبيناً معطى بالعلاقة (7.18).

50- عودة الى تجربة شترن - غيرلاخ .

يجب أن نلاحظ أولاً أن العزم الحركي الكلي لذرة الفضة يساوي العزم السبيني للالكترون الخارجي $s = 1/2$. وهكذا استناداً الى هذه الملاحظة والى مسلمات باولي يضاف الى الهاملتوني (7.14) الطاقة الكامنة \hat{V}_s الناتجة عن العزم الحركي الذاتي وهي :

$$\hat{V}_s = \frac{e B_z}{m} \hat{S}_z \quad (7.22)$$

وبالتالي فان الهاملتوني الكلي يصبح :

$$\hat{H}' = \hat{H}_n + \hat{W} + \hat{V}_s = \hat{H}_n + \frac{e B_z}{2m} (\hat{L}_z + 2\hat{S}_z) \quad (7.23)$$

وتصبح معادلة شرودنجر (7.15) :

$$\begin{aligned} \hat{H}' |n, l, m_l, s, m_s\rangle &= [\hat{H}_n + \frac{e B_z}{2m} (\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)] |n, l, m_l, s, m_s\rangle = \\ &= [E_n + \hbar \frac{e B_z}{2m} (m_l + 2m_s)] |n, l, m_l, s, m_s\rangle \end{aligned} \quad (7.24)$$

بالانتباه الى أن $s = 1/2$ فان $m_s = \pm 1/2$ فان الطاقة (7.16) تحول الى :

$$E_{n, m_l, m_s} = E_n + \frac{e B_z \hbar}{2m} (m_l \pm 1) \quad (7.25)$$

وأخيراً فان وجود حقل التحريض المغناطيسي سيؤدي الى انقسام سوية الطاقة الدنيا لذرات الفضة $(n=1, l=m_l=0, s=1/2, m_s=\pm 1/2)$ الى سويتين تقابلان البقعتين في تجربة شترن - غيرلاخ :

$$E_{1,0,1/2} = E_n + \frac{e B_z \hbar}{2m} \quad (7.26a)$$

$$E_{1,0,-1/2} = E_n - \frac{e\hbar^2}{2m} \quad (7.26b)$$

51 - بعض خواص الجمل ذات السبين $S = 1/2$:
 وجدنا سابقاً أن سبين الإلكترون $S = 1/2$ ، وهذا يعني أن $m_s = \pm 1/2$
 وهكذا فإن فضاء الحالات السبينية $\{|s, m_s\rangle\}$ مكوّن من شعاعين
 هما :

$$|1/2, 1/2\rangle \text{ و } |1/2, -1/2\rangle \quad (7.27)$$

تشكل مجموعة أشعة فضاء الحالات السبينية قاعدة منظمة ومتعامدة :
 أي أنها تحقق علاقات التنظيم وعلاقات المعامدة وعلاقة الاغـلاق
 التالية على الترتيب :

$$\langle 1/2, 1/2 | 1/2, 1/2 \rangle = \langle 1/2, -1/2 | 1/2, -1/2 \rangle = 1 \quad (7.28a)$$

$$\langle 1/2, 1/2 | 1/2, -1/2 \rangle = \langle 1/2, -1/2 | 1/2, 1/2 \rangle = 0 \quad (7.28b)$$

$$|1/2, 1/2\rangle \langle 1/2, 1/2| + |1/2, -1/2\rangle \langle 1/2, -1/2| = 1 \quad (7.28c)$$

وتصبح العلاقات (7.28) في حالة الإلكترون بالشكل :

$$\hat{S}^2 |1/2, \pm 1/2\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |1/2, \pm 1/2\rangle \quad (7.29a)$$

$$\hat{S}_z |1/2, \pm 1/2\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |1/2, \pm 1/2\rangle \quad (7.29b)$$

نعرف مؤشري التكوين والغناء \hat{S}_{\pm} بالشكل :

$$\hat{S}_{\pm} = \hat{S}_x \pm i \hat{S}_y \quad (7.30)$$

حيث أن تأثيرهما على الشعاع $|s, m_s\rangle$ هو :

$$\hat{S}_\pm |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle \quad (7.31)$$

وهكذا فإن تأثيرهما على أشعة القاعدة (7.27) هو :

$$\hat{S}_+ |1/2, 1/2\rangle = 0 \quad (7.32a)$$

$$\hat{S}_+ |1/2, -1/2\rangle = \hbar |1/2, 1/2\rangle \quad (7.32b)$$

$$\hat{S}_- |1/2, 1/2\rangle = \hbar |1/2, -1/2\rangle \quad (7.32c)$$

$$\hat{S}_- |1/2, -1/2\rangle = 0 \quad (7.32d)$$

يتكون فضاء الحالات السبينية من الشعاعين (7.27) اذن يمثل كل موثر في هذا الفضاء بمصفوفة مربعة (2×2) ، ونستطيع ايجاد المصفوفات الممثلة لمركبات \hat{S} على المحاور الاحداثية استناداً الى العلاقات (7.32) و (7.33) و (7.34) وهي :

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |1/2, 1/2\rangle \\ |1/2, -1/2\rangle \end{matrix} \quad (7.33a)$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |1/2, 1/2\rangle \\ |1/2, -1/2\rangle \end{matrix} \quad (7.33b)$$

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |1/2, 1/2\rangle \\ |1/2, -1/2\rangle \end{matrix} \quad (7.33c)$$

بمقارنة هذه المصفوفات مع مصفوفات باولي التالية :

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.34a)$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (7.34b)$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.34c)$$

نستطيع أن نكتب \hat{S} بدلالة \hat{S}_z (مركبات \hat{S} على المحاور
الاحداثية هي مصفوفات باولي) بالشكل :

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}$$

(7.35)

من الجدير بالذكر أنه في حالة كتابة المؤثرات بشكل مصفوفات
فإن اشعتها الخاصة تكون مصفوفة من عمود واحد (2×1) . لنرمز
للمؤثرات الخاصة α_1 و α_2 للشعاعين الخاصين للمؤثر \hat{S}_z المقابلين للقيم الخاصة
 $\hbar/2$ و $-\hbar/2$ على الترتيب ، يمثل هذان الشعاعان بالشكل المصفوفي
بالشكل :

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(7.36a)

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(7.36b)

يسمى كل عمود من الشكل (7.36) سبينور ، يجب الإشارة هنا إلى أن كل
عمود من هذه الأعمدة معين إلى ثابت ضرب كافي $i\hbar$ حيث \hbar عدد
حقيقي . ويمكن إيجاد جميع السبينورات المتعلقة بمؤثرات فضاء
الحالات السبينية .

سنورد الآن بعض خواص مصفوفات باولي وهي :

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = 1 \quad (7.37)$$

$$\hat{\sigma}_k \hat{\sigma}_l + \hat{\sigma}_l \hat{\sigma}_k = 2 \delta_{kl} \quad ; (k, l = x, y, z) \quad (7.38)$$

$$[\hat{\sigma}_k, \hat{\sigma}_l] = 2i \delta_{klm} \hat{\sigma}_m \quad ; (k, l, m = x, y, z) \quad (7.39)$$

حيث أدخلنا الاصطلاح :

$$\delta_{klm} = \begin{cases} +1 & \text{إذا كانت الأدلة مرتبة دورياً} \\ -1 & \text{إذا كانت الأدلة غير دورية} \\ 0 & \text{إذا تساوي دليلان أو أكثر} \end{cases} \quad \begin{matrix} m \\ \downarrow + \uparrow \\ k \rightarrow l \end{matrix} \quad (7.40)$$

بالإضافة الى ذلك فان آثار هذه المصفوفات معدومة :

$$S_x \hat{\sigma}_x = S_x \hat{\sigma}_y = S_x \hat{\sigma}_z = 0 \quad (7.41)$$

ومعيناتها تساوي -1 :

$$\text{Det } \hat{\sigma}_x = \text{Det } \hat{\sigma}_y = \text{Det } \hat{\sigma}_z = -1 \quad (7.42)$$

52- تركيب سبينين $1/2$:

بفرض أنه لدينا جملة مكونة من جسيمين لهما السبين نفسه $s_1 = s_2 = 1/2$ ، هكذا فان $m_{s_1} = m_{s_2} = \pm 1/2$ و $m_{s_2} = m_{s_2} = \pm 1/2$ ، وليكن \hat{S}_1 مؤثر السبين للجسيم الأول و \hat{S}_2 مؤثر السبين للجسيم الثاني ، بفرض أن \mathcal{H}_2 فضاء الحالات السبينية المتعلقة بالجسيم (1) عندما يكون بمفرده ، وأن مجموعة الأشعة $\{|s_1, m_1\rangle\}$ تشكل قاعدة منظمة ومتعامدة فيه ، ان العلاقات التالية محققة :

$$\hat{S}_1^2 |s_1, m_1\rangle = s_1(s_1+1) \hbar^2 |s_1, m_1\rangle \quad (7.43a)$$

$$\hat{S}_{1z} |s_1, m_1\rangle = m_1 \hbar |s_1, m_1\rangle \quad (7.43b)$$

وبالمثل بفرض أن \mathcal{H}_1 فضاء الحالات السبينية المتعلقة بالجسيم (2) عندما يكون بمفرده وأن مجموعة الأشعة $\{|s_2, m_2\rangle\}$ تشكل قاعدة منظمة ومتعامدة فيه ، ان العلاقات التالية محققة :

$$\hat{S}_2^2 |s_2, m_2\rangle = s_2(s_2+1) \hbar^2 |s_2, m_2\rangle \quad (7.44a)$$

$$\hat{S}_{2z} |s_2, m_2\rangle = m_2 \hbar |s_2, m_2\rangle \quad (7.44b)$$

ان المؤثرات التي تتعلق بالجسيم الأول تقبل التبادل مع جميع المؤثرات المتعلقة بالجسيم الثاني وهكذا فان علاقات التبادل التالية

محققة :

$$[\hat{S}_1^x, \hat{S}_2^x] = [\hat{S}_1^y, \hat{S}_2^y] = [\hat{S}_1^z, \hat{S}_2^z] = 0 \quad (7.45a)$$

$$[\hat{S}_1^x, \hat{S}_2^y] = [\hat{S}_1^y, \hat{S}_2^x] = [\hat{S}_1^x, \hat{S}_2^z] = 0 \quad (7.45b)$$

وهذا يقتضي بأن مجموعة المؤثرات $\{\hat{S}_1^x, \hat{S}_2^x, \hat{S}_1^y, \hat{S}_2^y, \hat{S}_1^z, \hat{S}_2^z\}$ تشكل مجموعة كاملة من الملحوظات الفيزيائية التي تقبل التبادل فيما بينها مشنى مشنى . وبذلك يكون فضاء الحالات السبينية للجملة الكتلية E_S هو الجداء التنسوري للفضاءين $E_S(1)$ و $E_S(2)$:

$$E_S = E_S(1) \otimes E_S(2) \quad (7.46)$$

نعلم من جهة أخرى أن عناصر القاعدة في $E_S(1)$ و $E_S(2)$ هي على التوالي :

$$\{|S_1, m_1\rangle\} = \{|1/2, 1/2\rangle, |1/2, -1/2\rangle\} \quad (7.47)$$

$$\{|S_2, m_2\rangle\} = \{|1/2, 1/2\rangle, |1/2, -1/2\rangle\} \quad (7.48)$$

نلاحظ أن القاعدتين متطابقتان تماماً ، لذلك نضيف الدليل (1) للقاعدة (7.47) والدليل (2) للقاعدة (7.48) ونحذف لتسهيل الكتابة S_1 و S_2 فتصبح القاعدتان على الشكل :

$$\{|1; m_1\rangle\} = \{|1; 1/2\rangle, |1; -1/2\rangle\} \quad (7.49)$$

$$\{|2; m_2\rangle\} = \{|2; 1/2\rangle, |2; -1/2\rangle\} \quad (7.50)$$

وتكون القاعدة في E_S هي الجداء التنسوري للقاعدتين في $E_S(1)$ و $E_S(2)$ ولنرمز لها بالشكل $|m_1, m_2\rangle$ فتكون :

$$(7.51)$$

$$|m_1, m_2\rangle = |1; m_1\rangle \otimes |2; m_2\rangle$$

وهكذا فإن العنصر الأول من الشعاع $|m_1, m_2\rangle$ متعلق بالجسم (1)
 والعنصر الثاني من الشعاع نفسه متعلق بالجسم (2)، بذلك تكون
 القاعدة في مكونة من أربعة أشعة : $4 = (2s_1 + 1)(2s_2 + 1)$ وهي :

$$|1/2, 1/2\rangle = |1: 1/2\rangle \otimes |2: 1/2\rangle \quad (7.54a)$$

$$|1/2, -1/2\rangle = |1: 1/2\rangle \otimes |2: -1/2\rangle \quad (7.54b)$$

$$|-1/2, 1/2\rangle = |1: -1/2\rangle \otimes |2: 1/2\rangle \quad (7.54c)$$

$$|-1/2, -1/2\rangle = |1: -1/2\rangle \otimes |2: -1/2\rangle \quad (7.54d)$$

ومن الجدير بالذكر أن القاعدة $\{|m_1, m_2\rangle\}$ منظمة ومتعامدة :
 نعرف السبين الكلي \hat{S} لجملة الجسيمين بالعلاقة :

$$\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2 \quad (7.55)$$

تكون مركباته على المحاور الاحداثية هي :

$$\hat{S}_k = \hat{S}_{1k} + \hat{S}_{2k} \quad ; \quad (k = x, y, z) \quad (7.56)$$

يبرهن بسهولة على أن \hat{S} يمثل عزما حركيا ، في الحقيقة لنحسب
 مبدل \hat{S}_x و \hat{S}_y على سبيل المثال :

$$\begin{aligned} [\hat{S}_x, \hat{S}_y] &= [\hat{S}_{1x} + \hat{S}_{2x}, \hat{S}_{1y} + \hat{S}_{2y}] = \\ &= [\hat{S}_{1x}, \hat{S}_{1y}] + [\hat{S}_{1x}, \hat{S}_{2y}] + [\hat{S}_{2x}, \hat{S}_{1y}] + [\hat{S}_{2x}, \hat{S}_{2y}] = \\ &= i\hbar \hat{S}_{1z} + 0 + 0 + i\hbar \hat{S}_{2z} = \\ &= i\hbar (\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}) = \\ &= i\hbar \hat{S}_z \end{aligned} \quad (7.57)$$

بالطريقة نفسها نستطيع البرهان على صحة العلاقتين التاليتين :

$$[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar \hat{S}_x \quad (7.58)$$

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar \hat{S}_y \quad (7.59)$$

يمكننا الحصول على \hat{S}^2 بتربيع العلاقة (7.53):

$$\hat{S}^2 = (\hat{S}_1 + \hat{S}_2)^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_1\hat{S}_2 \quad (7.58)$$

حيث تكتب \hat{S}_1, \hat{S}_2 بدلالة $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ بالشكل:

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 \hat{S}_2 &= \hat{S}_{12} \hat{S}_{22} + \hat{S}_{11} \hat{S}_{21} + \hat{S}_{13} \hat{S}_{23} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{S}_{1+} \hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-} \hat{S}_{2+}) + \hat{S}_{13} \hat{S}_{23} \end{aligned} \quad (7.59)$$

بملاحظة أن كلا من \hat{S}_1 و \hat{S}_2 يقبلان التبادل مع كل من \hat{S}_1^2 و \hat{S}_2^2 وبالعودة الى التعريف (7.53) نجد أن جميع مركبات العزم السبينسي الكلي للجملة تقبل التبادل مع كل من \hat{S}_1^2 و \hat{S}_2^2 وبشكل خاص فإن كلا من \hat{S}_1^2 و \hat{S}_2^2 يقبلان التبادل معهما :

$$[\hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2] = [\hat{S}_2^2, \hat{S}_1^2] = 0 \quad (7.60a)$$

$$[\hat{S}_1^2, \hat{S}_1^2] = [\hat{S}_2^2, \hat{S}_2^2] = 0 \quad (7.60b)$$

من جهة أخرى فإن \hat{S}_2^2 يقبل التبادل مع كل من \hat{S}_{13} و \hat{S}_{23} حسب (7.54):

$$[\hat{S}_2^2, \hat{S}_{13}] = [\hat{S}_2^2, \hat{S}_{23}] = 0 \quad (7.61)$$

ولكن \hat{S}_1^2 لا يقبل التبادل مع أي من \hat{S}_{13} و \hat{S}_{23} ، في الحقيقة واعتماداً على (7.58):

$$\begin{aligned} [\hat{S}_1^2, \hat{S}_{13}] &= [\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_1\hat{S}_2, \hat{S}_{13}] \\ &= [\hat{S}_1^2, \hat{S}_{13}] + [\hat{S}_2^2, \hat{S}_{13}] + 2[\hat{S}_1\hat{S}_2, \hat{S}_{13}] \\ &= 2[\hat{S}_{12}\hat{S}_{22} + \hat{S}_{11}\hat{S}_{21} + \hat{S}_{13}\hat{S}_{23}, \hat{S}_{13}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i \{ [\hat{S}_{1z}, \hat{S}_{2z}, \hat{S}_{1y}] + [\hat{S}_{1y}, \hat{S}_{2y}, \hat{S}_{1z}] + [\hat{S}_{1x}, \hat{S}_{2x}, \hat{S}_{1z}] \} \\
&= i \{ [\hat{S}_{1z}, \hat{S}_{1z}] \hat{S}_{2y} + \hat{S}_{1z} [\hat{S}_{1z}, \hat{S}_{1y}] + [\hat{S}_{1z}, \hat{S}_{1y}] \hat{S}_{2y} + \\
&\quad + \hat{S}_{1y} [\hat{S}_{2y}, \hat{S}_{1z}] + [\hat{S}_{1y}, \hat{S}_{1z}] \hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1x} [\hat{S}_{1x}, \hat{S}_{1z}] \} = \\
&= i (-i\hbar \hat{S}_{1y} \hat{S}_{2z} + i\hbar \hat{S}_{1x} \hat{S}_{2y}) = \\
&= i\hbar (-\hat{S}_{1y} \hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1x} \hat{S}_{2y}) \quad (7.61)
\end{aligned}$$

وهكذا فان مجموعة الموءثرات $\{\hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2, \hat{S}^2, \hat{S}_z\}$ تشكل مجموعة كاملة من الملحوظات الفيزيائية التي تقبل التبادل فيما بينها مشى مشى، لرمز بـ $\{|s, m_s\rangle\}$ لمجموعة الأشعة الخاصة المشتركة لها، تختلف هذه المجموعة من الأشعة عن مجموعة الأشعة (7.54) لأن \hat{S}_z^2 لا يقبل السادل مع كل من \hat{S}_1^2 و \hat{S}_2^2 ، وهي تحقق العلاقات التالية :

$$\hat{S}_1^2 |s, m_s\rangle = \hat{S}_2^2 |s, m_s\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |s, m_s\rangle \quad (7.61a)$$

$$\hat{S}^2 |s, m_s\rangle = s(s+1) \hbar^2 |s, m_s\rangle \quad (7.61b)$$

$$\hat{S}_z |s, m_s\rangle = m_s \hbar |s, m_s\rangle \quad (7.61c)$$

لقد برهنا سابقاً أن \hat{S}_z عزم حركي وبالتالي فان s اما ان يكون عدداً صحيحاً أو نصف صحيح وتأخذ m_s جميع القيم المحصورة بين $+s$ و $-s$. بحيث يكون $2m_s = 1$ ، سنوجد الآن مجموعة الأشعة $\{|s, m_s\rangle\}$ وهي أربعة أشعة : $(2s_1+1)(2s_2+1) = 4$ ، بدلالة الأشعة $\{|m_1, m_2\rangle\}$. ينتج من التعريف (7.53) أن تأخذ القيم $s_1, s_2 \leq s \leq s_1+s_2$ ، حيث $s=1$ ، هكذا فان قيم s هي : $s=0, 1$ ، ففي الحالة $s=0$ فان $m_s=0$ وفي الحالة $s=1$ فان $m_s=0, \pm 1$ وهكذا فان أشعة القاعدة $\{|s, m_s\rangle\}$ هي :

$$\{ |1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle, |0,0\rangle \}$$

(7.64)

وحداتاً سابقاً أن \hat{S}_3 يفيل التبادل مع كل مؤثر من المجموعة
 حسب العلاقات (7.65) و (7.61)، هذا يعني
 أن أشعة القاعدة (7.62) هي أشعة خاصة لـ \hat{S}_3 :

$$\begin{aligned}\hat{S}_3 |m_1, m_2\rangle &= (\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}) |m_1, m_2\rangle \\ &= \hat{S}_{1z} |m_1, m_2\rangle + \hat{S}_{2z} |m_1, m_2\rangle \\ &= m_1 \hbar |m_1, m_2\rangle + m_2 \hbar |m_1, m_2\rangle \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |m_1, m_2\rangle\end{aligned}\quad (7.65)$$

وهذا يعني أن $m_3 = m_1 + m_2$ ، لندرس الآن الشعاع $|m_1, m_2\rangle = |1/2, 1/2\rangle$
 أن هذا الشعاع هو شعاع خاص للمؤثر \hat{S}_3 مقابل للقيمة الخاصة \hbar :
 $m_3 = 1/2 + 1/2 = 1$ ، وبالعودة الى قيم S نجد أنها يجب أن تساوي
 $S = 1$ ، أن الشعاع $|1/2, 1/2\rangle$ هو أيضاً شعاع خاص للمؤثر \hat{S}^2 ،
 وبما أن m_3 غير منطبق إذن يكون لدينا :

(7.66)

$$|1,1\rangle = |1/2, 1/2\rangle$$

نطبق المؤثر \hat{S}_3 على الشعاع $|1,1\rangle$ لايجاد الشعاع $|1,0\rangle$ وذلك بالاعتماد
 على (7.61) كما يلي :

(7.67)

$$\hat{S}_- |1,1\rangle = \hbar \sqrt{2} |1,0\rangle$$

فيكون الشعاع $|1,0\rangle$:

(7.68)

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\hbar \sqrt{2}} \hat{S}_- |1,1\rangle = \frac{1}{\hbar \sqrt{2}} \hat{S}_- |1/2, 1/2\rangle$$

وبالعودة الى (7.63) نجد أن :

(7.69)

$$\hat{S}_- = \hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-}$$

بتعويض (7.69) في (7.68) نجد :

$$\begin{aligned}
 |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{S}_1 + \hat{S}_2) |1/2, 1/2\rangle = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{S}_1 |1/2, 1/2\rangle + \hat{S}_2 |1/2, 1/2\rangle] = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\hbar |1/2, 1/2\rangle + \hbar |1/2, 1/2\rangle] = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1/2, 1/2\rangle + |1/2, 1/2\rangle] \quad (7.70)
 \end{aligned}$$

وبتطبيق \hat{S}_z على $|1,0\rangle$ نحصل على الشعاع $|1,0\rangle$:

$$\begin{aligned}
 |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{S}_z |1,0\rangle = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{S}_1 + \hat{S}_2) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [|1/2, 1/2\rangle + |1/2, 1/2\rangle] \right\} = \\
 &= \frac{1}{2\hbar} [\hat{S}_1 |1/2, 1/2\rangle + \hat{S}_1 |1/2, 1/2\rangle + \hat{S}_2 |1/2, 1/2\rangle + \hat{S}_2 |1/2, 1/2\rangle] = \\
 &= \frac{1}{2\hbar} [\hbar |1/2, 1/2\rangle + \hbar |1/2, 1/2\rangle] = \\
 &= |1/2, 1/2\rangle \quad (7.71)
 \end{aligned}$$

ولايجاد الشعاع المتعلق بقيمة $S=0$ و $m_s=0$ نلاحظ أننا نستطيع الحصول

على $m_s = m_1 + m_2 = 0$ بطريقتين : في حالة $m_1 = 1/2, m_2 = -1/2$ وهي عبارة عن تركيب خطي للشعاعين $|1/2, 1/2\rangle, |1/2, -1/2\rangle$ أي :

$$|0,0\rangle = \alpha |1/2, 1/2\rangle + \beta |1/2, -1/2\rangle \quad (7.72)$$

حيث α و β اعداد يجب تعيينها . لذلك نفرض على الشعاع $|0,0\rangle$ أن يكون منظماً :

$$\langle 0,0 | 0,0 \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

(7.73)

وأن يكون أيضاً معامداً للأشعة الأخرى وبشكل خاص للشعاع $|1,0\rangle$:

$$\langle 1,0 | 0,0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta) = 0 \quad (7.74)$$

بالمقارنة بين العلاقتين (7.73) و (7.74) نجد أن :

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (7.75)$$

وهكذا يكون الشعاع $|0,0\rangle$:

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1/2, -1/2\rangle - |1/2, 1/2\rangle] \quad (7.76)$$

ملاحظات :

1 - نسمي الحالة الممثلة بالشعاع $|0,0\rangle$ حالة وحيدة (Singulet).

ونسمي مجموعة الحالات $|1, m_s\rangle$ ($m_s = 0, \pm 1$) حالات ثلاثية (Triplet).

2 - أن الحالات الثلاثية هي حالات تناظرية بالنسبة لتبديل دَوْرِي الجسيمين بالنسبة للسبين ، أما الحالة الفردية فهي حالة لاتناظرية بالنسبة لدَوْرِي الجسيمين بالنسبة للسبين وهذا يعني أن التابع يغير اشارته .

3 - يفضل عند دراسة جملة مكونة من جسيمين لهما السبين نفسه استخدام القاعدة $\{ |s, m_s\rangle \}$ بدلا من القاعدة $\{ |m_1, m_2\rangle \}$ لأن عناصرها أشعة خاصة لكل من \hat{S}_1 و \hat{S}_2 حيث نجد أن المصفوفتين الممثلتين

(7.77)

$$\hat{S}_1^2 = \hat{S}_2^2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |0,0\rangle \\ |1,1\rangle \\ |1,0\rangle \\ |1,-1\rangle \end{matrix}$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 10,00 \\ 11,00 \\ 10,00 \\ 11,-10 \end{matrix} \quad (7.72)$$

4 - يمكن حساب أشعة القاعدة $\{|s, m_s\rangle\}$ بدلالة أشعة القاعدة $\{|m_1, m_2\rangle\}$ بطريقة أخرى وذلك بحساب أثر كل من \hat{S}^2 و \hat{S}_z على أشعة القاعدة $\{|m_1, m_2\rangle\}$ ومن ثم إيجاد المصفوفات الممثلة لهما في هذه القاعدة وبعد ذلك تقطير هذه المصفوفات .

53- العزم الحركي الالكتروني الكلي :

نعرف العزم الحركي الكلي للالكترتون \hat{J} بأنه مجموع عزمه الحركي المداري \hat{L} وعزمه السبيني \hat{S} .

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S} \quad (7.79)$$

وهذا يعني أن مركباته على المحاور الاحداثية هي :

$$\hat{J}_k = \hat{L}_k + \hat{S}_k : (k = x, y, z) \quad (7.80)$$

ان \hat{J} يمثل عزمًا حركيًا وهذا يقتضي بأن تحقق مركباته على المحاور الاحداثية علاقات التبادل التالية :

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z \quad (7.81a)$$

$$[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar \hat{J}_x \quad (7.81b)$$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar \hat{J}_y \quad (7.81c)$$

لنبرهن على صحة إحدى العلاقات ويبرهن على صحة العلاقات الأخرى بالطريقة نفسها ، ولكن يجب الإشارة هنا ، قبل البدء بالبرهان ، إلى أن كلا العزمين الحركيين \hat{L} و \hat{S} يتعلقان بمتحولات مستقلة ومختلفة وهكذا فإن مركباتها على المحاور الاحداثية تقبل التبادل فيما بينها :

$$\begin{aligned}
 [\hat{J}_x, \hat{J}_y] &= [\hat{L}_x + \hat{S}_x, \hat{L}_y + \hat{S}_y] \\
 &= [\hat{L}_x, \hat{L}_y] + [\hat{L}_x, \hat{S}_y] + [\hat{S}_x, \hat{L}_y] + [\hat{S}_x, \hat{S}_y] \\
 &= i\hbar \hat{L}_z + 0 + 0 + i\hbar \hat{S}_z \\
 &= i\hbar (\hat{L}_z + \hat{S}_z) \\
 &= i\hbar \hat{J}_z
 \end{aligned} \tag{7.82}$$

نفرض أن \mathcal{H} فضاء الحالات المدارية للإلكترون وأن مجموعة الأشعة $\{|l, m_l\rangle\}$ تشكل قاعدة منظمة ومتعامدة فيه. ان العلاقات التالية محققة:

$$\hat{L}^2 |l, m_l\rangle = l(l+1) \hbar^2 |l, m_l\rangle \tag{7.83a}$$

$$\hat{L}_z |l, m_l\rangle = m_l \hbar |l, m_l\rangle \tag{7.83b}$$

وبالمثل نفرض أن \mathcal{H}_s فضاء الحالات السبينية للإلكترون وأن مجموعة الأشعة $\{|s, m_s\rangle\}$ تشكل قاعدة منظمة ومتعامدة فيه. ان العلاقات التالية محققة:

$$\hat{S}^2 |s, m_s\rangle = s(s+1) \hbar^2 |s, m_s\rangle \tag{7.84a}$$

$$\hat{S}_z |s, m_s\rangle = m_s \hbar |s, m_s\rangle \tag{7.84b}$$

وبما أن العزم المداري \hat{L} يتعلق بمتحولات مختلفة ومستقلة عن المتحولات التي يتعلق بها العزم السبيني \hat{S} ، فإن جميع المؤشرات المتعلقة بـ \hat{L} تقبل التبادل مع جميع المؤشرات المتعلقة بـ \hat{S} وبشكل خاص فإن علاقات التبادل التالية محققة:

$$[\hat{L}_x, \hat{S}_x] = [\hat{L}_y, \hat{S}_y] = [\hat{L}_z, \hat{S}_z] = 0 \tag{7.85a}$$

$$[\hat{S}_x, \hat{L}_y] = [\hat{S}_y, \hat{L}_x] = [\hat{S}_z, \hat{L}_z] = 0 \tag{7.85b}$$

وهذا يقود الى أن مجموعة المؤثرات $\{\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z, \hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z\}$ تشكل مجموعة كاملة من الملحوظات الفيزيائية التي تقبل التبادل فيما بينها متى متى وبذلك يكون فضاء الحالات الكلي \mathcal{H} هو الجداء التنسوري للفضائين \mathcal{E}_L و \mathcal{E}_S :

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}_L \otimes \mathcal{E}_S \quad (7.76)$$

وتكون القاعدة في هذا الفضاء هي الجداء التنسوري للقاعدتين في كلا الفضائين :

$$|l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle = |l, s, m_l, m_s\rangle \quad (7.77)$$

ولنرمز لها اختصاراً بالشكل :

$$|m_l, m_s\rangle \equiv |l, s, m_l, m_s\rangle \quad (7.78)$$

ويكون عدد عناصر هذه القاعدة $(2l+1)(2s+1)$ وهي قاعدة منظمة متعامدة . بالعودة الى التعريف (7.79) يمكننا الحصول على \hat{J}^2 بتربيع هذه العلاقة :

$$\hat{J}^2 = (\hat{L} + \hat{S})^2 =$$

$$= \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{L}\hat{S}$$

(7.79) حيث نستطيع كتابة الجداء $\hat{L} \cdot \hat{S}$ بدلالة $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z, \hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ بالشكل :

$$\hat{L} \cdot \hat{S} = \hat{L}_x \hat{S}_x + \hat{L}_y \hat{S}_y + \hat{L}_z \hat{S}_z =$$

$$= \frac{1}{2} (\hat{L}_+ \hat{S}_- + \hat{L}_- \hat{S}_+) + \hat{L}_z \hat{S}_z$$

(7.80)

وبالعودة \hat{L}^2 و \hat{S}^2 يقبل التبادل مع كل من \hat{L}_x و \hat{L}_y و \hat{L}_z و \hat{S}_x و \hat{S}_y و \hat{S}_z ان كلاً من \hat{L} و \hat{S} للتعريف (7.79) نجد أن جميع مركبات العزم الكلي \hat{J} تقبل التبادل مع كل من \hat{L}^2 و \hat{S}^2 وبشكل خاص فان كلاً من \hat{L}^2 و \hat{S}^2 يقبلان

التبادل معهما :

$$[\hat{J}_x^2, \hat{L}_x^2] = [\hat{J}_x^2, \hat{S}_x^2] = 0$$

(7.91a)

$$[\hat{J}_y^2, \hat{L}_x^2] = [\hat{J}_y^2, \hat{S}_x^2] = 0$$

(7.91b)

ومن جهة أخرى فإن \hat{J}_x يقبل التبادل مع \hat{L}_x و \hat{S}_x حسب

$$[\hat{J}_x, \hat{L}_x] = [\hat{J}_x, \hat{S}_x] = 0$$

(7.92)

ولكن \hat{J}_x^2 لا يقبل التبادل مع أي من \hat{L}_x و \hat{S}_x في الحقيقة وباعتماد على

(7.89) و (7.90) :

$$[\hat{J}_x^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}_x^2 + \hat{S}_x^2 + 2\hat{L}_x\hat{S}_x, \hat{L}_x] =$$

$$= [\hat{L}_x^2, \hat{L}_x] + [\hat{S}_x^2, \hat{L}_x] + 2[\hat{L}_x\hat{S}_x, \hat{L}_x] =$$

$$= 2[\hat{L}_x\hat{S}_x + \hat{L}_y\hat{S}_y + \hat{L}_z\hat{S}_z, \hat{L}_x] =$$

$$= 2\{[\hat{L}_x, \hat{L}_x]\hat{S}_x + \hat{L}_x[\hat{S}_x, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y, \hat{L}_x]\hat{S}_y + \hat{L}_y[\hat{S}_y, \hat{L}_x] +$$

$$+ [\hat{L}_z, \hat{L}_x]\hat{S}_z + \hat{L}_z[\hat{S}_z, \hat{L}_x]\} =$$

$$= 2[-i\hbar\hat{L}_y\hat{S}_z + i\hbar\hat{L}_z\hat{S}_y] =$$

$$= 2i\hbar[-\hat{L}_y\hat{S}_z + \hat{L}_z\hat{S}_y]$$

(7.93)

وهكذا فإن مجموعة المؤثرات $\{\hat{L}_x^2, \hat{S}_x^2, \hat{J}_x^2, \hat{J}_z^2\}$ تشكل مجموعة كاملة من الملحوظات الفيزيائية التي تقبل التبادل فيما بينها مشتي مشتي. لنرمز بـ $\{|l, m_l, m_s\rangle\}$ لمجموعة الأشعة الخاصة المشتركة لها، إن هذه المجموعة تشكل قاعدة منظمة ومتعامدة وتختلف عن القاعدة (7.89) لأن \hat{J}_x^2 لا يقبل التبادل مع \hat{L}_x و \hat{S}_x ولنرمز لها اختصاراً بالشكل :

(7.94)

$$|l, m_l, m_s\rangle \equiv |l, s, m_j\rangle$$

ان هذه القاعدة تحقق العلاقات التالية :

$$\hat{L}^2 |j, m_j\rangle = l(l+1) \hbar^2 |j, m_j\rangle \quad (7.95a)$$

$$\hat{S}^2 |j, m_j\rangle = s(s+1) \hbar^2 |j, m_j\rangle \quad (7.95b)$$

$$\hat{J}^2 |j, m_j\rangle = j(j+1) \hbar^2 |j, m_j\rangle \quad (7.95c)$$

$$\hat{J}_z |j, m_j\rangle = m_j \hbar |j, m_j\rangle \quad (7.95d)$$

يمثل \hat{J} عزماً حركياً وبالتالي فان j أما أن يكون عدداً صحيحاً أو نصف عدد صحيح وتأخذ m_j جميع القيم المحصورة بين $-j$ و $+j$. بحيث يكون $\Delta m_j = 1$. وحسب قواعد جمع العزوم الحركية فان j تأخذ جميع القيم المحصورة بين $l-k$ و $l+k$ بحيث يكون $\Delta j = 1$.

$$|l-k| \leq j \leq l+k, \quad \Delta j = 1 \quad (7.96)$$

ويكون عدد أشعة القاعدة $\{ |j, m_j\rangle \}$ هو $(2l+1)(2s+1)$. من الجدير بالذكر أن العدد j يضاف كدليل سفلي للحرف الذي يرمز للعزم الحركي المداري l وذلك في المصطلحات الذرية والأطياف:

$$n l_j \quad (7.97)$$

حيث l هو الحرف s من أجل قيمة $l=0$ وهو الحرف p من أجل قيمة $l=1$ والحرف d من أجل قيمة $l=2$ وهكذا. مثلاً نرمز للطبقات الجزئية في سوية الطاقة $n=2$ لذرة الهيدروجين بالشكل :

$$2p_{3/2}, 2p_{1/2}, 2s_{1/2}$$

مسائل الفصل السابع

١ - مسألة محلولة (I) :

أوجد هاملتوني جسيم، كتلته m وشحنته q موجود في حقل كهربائي، موصوف بالحقل الكهربائي $\vec{E}(\vec{r}, t)$ وحقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

الحل :

نلاحظ في البداية أن \vec{E} و \vec{B} يحققان معادلات مكسويل التالية:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho/\epsilon_0, & \text{c) } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \text{b) } \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t, & \text{d) } \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (I.1)$$

حيث $\rho(\vec{r}, t)$ الكثافة الحجمية للشحنات و $\vec{J}(\vec{r}, t)$ كثافة التيار اللذان يولدان الحقل الكهربائي و ϵ_0 سماحية الخلاء الكهربائي و μ_0 نفوذية الخلاء المغناطيسية. نستطيع أن نصف الحقلين \vec{E} و \vec{B} بالكمونين : الشعاعي $\vec{A}(\vec{r}, t)$ والسلمي $V(\vec{r}, t)$ ، في الحقيقة أن المعادلة (I.1c) تقتضي وجوب وجود حقل شعاعي $\vec{A}(\vec{r}, t)$ بحيث يتحقق :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (I.2)$$

وبتعويض قيمة \vec{B} في العلاقة (I.1b) نجد :

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (I.3)$$

وهذا يقتضي وجوب وجود ثابت سلمي $V(\vec{r}, t)$ بحيث يتحقق :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}, t) \quad (I.4)$$

يصف الكمونان $\vec{A}(\vec{r}, t)$ و $V(\vec{r}, t)$ الحقل الكهربائي، ونسمي مجموعتهما

المعيار ونرمز له بالشكل $\{\vec{A}, V\}$ ، ونستطيع حساب الحقلين الكهربائي

والمغناطيسي اعتباراً من المعيار $\{\vec{A}, V\}$ بالمعادلتين التاليتين :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (I.5a)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (I.5b)$$

يجب الإشارة هنا إلى أنه نستطيع إيجاد مجموعة لانهاية من

المعيار المتكافئة التي تصف حقلاً كهربيسياً معيناً . في الحقيقة ،
نعرض أن حقلاً كهربيسياً ما ، معيناً بالحقليين \vec{E} و \vec{B} اللذين
نستطيع حسابها اعتباراً من المعيار $\{\vec{A}, \vec{V}\}$ ، فإن جميع المعيار
 $\{\vec{A}', \vec{V}'\}$ المتكافئة للمعيار $\{\vec{A}, \vec{V}\}$ تُستنتج منه بواسطة معادلتين
تغير المعيار التاليتين :

$$\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} W(\vec{r}, t) \quad (I.6a)$$

$$\vec{V}'(\vec{r}, t) = \vec{V}(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} W(\vec{r}, t) \quad (I.6b)$$

حيث $W(\vec{r}, t)$ تابع سلمي كافي . وللبرهان على صحة ما أوردناه سابقاً
يكفي البرهان على أن المعيار المتكافئة تعطي الحقول الكهربائية
المغناطيسية نفسها وأنه إذا وجد معياران متكافئان ، فيوجد حتماً
تابع سلمي $W(\vec{r}, t)$ يربط بينهما بواسطة العلاقات (I.6) .
يبرهن بسهولة ، في البداية ، واعتباراً من العلاقات (I.6)

على أن :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (I.7a)$$

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{V}'(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}'(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (I.7b)$$

وهنا يعني أن جميع المعيار $\{\vec{A}', \vec{V}'\}$ التي تحقق العلاقات (I.6)
تعطي نفس الحقول الكهربائية والمغناطيسية التي يعطيها المعيار $\{\vec{A}, \vec{V}\}$ ،
وبالمقابل نفرض أن المعيارين $\{\vec{A}, \vec{V}\}$ و $\{\vec{A}', \vec{V}'\}$ متكافئان هذا
يعني أنهما يحققان ، من أجل \vec{B} ، ما يلي :

$$(I.8)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}'(\vec{r}, t)$$

وهذا يعني أن :

$$(I.9)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A}' - \vec{A}) = 0$$

وهذا يقتضي وجوب كون $\vec{A}' - \vec{A}$ تدرجاً لتابع سلمي أي :

$$(I.10)$$

$$\vec{A}' - \vec{A} = \vec{\nabla} W(\vec{r}, t)$$

ومن جهة أخرى ، ان تكافؤ المعيارين $\{\vec{A}, \vec{V}\}$ و $\{\vec{A}', \vec{V}'\}$ يعني
انهما يحققان ، من أجل \vec{E} ، ما يلي :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} V'(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}'(\vec{r}, t) \quad (I.11)$$

ومن العلاقة (I.10) نجد :

$$\vec{\nabla} (V' - V) = -\vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} W(\vec{r}, t) \quad (I.12)$$

وباختيار ثابت مناسب ينتج لدينا ان :

$$V' - V = -\frac{\partial}{\partial t} W(\vec{r}, t) \quad (I.13)$$

ان التابع السلمي $W(\vec{r}, t)$ يربط بين المعيارين $\{\vec{A}, \vec{V}\}$ و $\{\vec{A}', \vec{V}'\}$ ،
وهكذا يجب ان يحقق معياران متكافئان بالضرورة المعادلات (I.6) .
سنوجد الهاملتوني بدلالة الكمونين \vec{A} و \vec{V} بدلاً من الحقلين \vec{E}
و \vec{B} ، اعتباراً من تابع لاغرانج .

لايجاد تابع لاغرانج ننتبه في البداية الى ان قوة لورنتز

تعطى بالعلاقة :

$$\vec{F} = q [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad (I.14)$$

حيث $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ سرعة الجسيم ، يجب ان تساوي قوة نيوتن لحصل
على معادلات الحركة :

$$m \vec{\ddot{r}} = q [\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{\dot{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)] \quad (I.15)$$

باسقاط هذه المعادلة على المحور x وبالاتماد على المعادلات

$$m \ddot{x} = q \left[-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \dot{z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \right] \quad (I.16)$$

بالمقارنة مع هذه العلاقة نلاحظ ان تابع لاغرانج يجب ان يأخذ
الشكل :

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{\dot{r}}, t) = \frac{1}{2} m \vec{\dot{r}}^2 + q \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - q V(\vec{r}, t) \quad (I.17)$$

لنبرهن على أن معادلات لاغرانج تعطينا معادلات الحركة (I.15) اعتباراً من تابع لاغرانج (I.17) في الحقيقة، تعطى معادلات لاغرانج بالشكل :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (I.18)$$

حيث q_i و \dot{q}_i الاحداثيات والسرع المعممة، من أجل الاحداثي x نجد :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} + q A_x(\vec{r}, t) \quad (I.19a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = q \vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial x} - q \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial x} \quad (I.19b)$$

بالتعويض في معادلات لاغرانج نجد :

$$\frac{d}{dt} [m \dot{x} + q A_x(\vec{r}, t)] - q \vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial x} + q \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial x} \quad (I.20)$$

بتفصيل هذه العلاقة استناداً الى أن المشتق الكلي بالنسبة للزمن هو :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \vec{q}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{q}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{q}}_i} \quad (I.21)$$

فنجد :

$$m \ddot{x} + q \left[\frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] +$$

$$- q \left[\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + q \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (I.22)$$

وبالتصحيح نجد :

$$m \ddot{x} = q \left[- \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \dot{z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \right] \quad (I.23)$$

وهي العلاقة نفسها (I.16) وهكذا فإن تابع لاغرانج (I.17) يعطي اعتباراً من معادلات لاغرانج (I.18) معادلات الحركة (I.15).
لنحسب الآن الهاملتوني اعتباراً من تابع لاغرانج حيث :

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (I.24)$$

حيث تعطى مركبة الاندفاع المعمم ، بدلالة الاحداثيات المعممة بالعلاقة :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (I.25)$$

وهكذا فان مركبته على المحور x هي :

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} + q A_x(\vec{r}, t) \quad (I.26)$$

بالتعميم نجد أن الاندفاع المعمم \vec{p} :

$$\vec{p} = m \vec{v} + q \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (I.27)$$

يجب الملاحظة هنا أن الاندفاع المعمم لا يتطابق مع كمية الحركة $m\vec{v}$ ، وهكذا نجد أن الهاملتوني :

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} =$$

$$= \vec{p} \cdot \left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} \right) - \frac{1}{2} m \left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} \right)^2 - q \left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} \right) \cdot \vec{A} + qU =$$

$$= \left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} \right) \left[\vec{p} - \left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{2} \right) - q\vec{A} \right] + qU =$$

$$= \left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} \right) \left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{2} \right) + qU =$$

$$= \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t) \right]^2 + qU(\vec{r}, t) \quad (I.28)$$

وهو هاملتوني جسيم ، كتلته m وشحنته q ، موجود في حقل كهربائي ، موصوف بالحقلين : الكهربائي \vec{E} والمغناطيسي \vec{B} المعطيين بالمعيار $\{\vec{A}, U\}$ ، وذلك بفرض أننا أهملنا السبين ، من الجدير بالذكر أيضا أن صيغة الهاملتوني (I.28) تتعلق فقط بالكمونين \vec{A} و U وهذا يعني أن وصف الحركة يتعلق بالمعيار المختار ،

ميكانيك الكم ٢-١٥

وهكذا يجب أن تكون التوقعات ، المتعلقة بالسلوك الفيزيائي للجسيم ،
واحدة من أجل معيارين متكافئين وبالتالي فان صيغة الهاملتوني
لا تتغير بالنسبة للمعيار .
من الجدير بالذكر أنه في حالة أخذ السبين بعين الاعتبار ،
يجب إضافة الى الهاملتوني (I.28) ، الطاقة الكامنة الناتجة عن
السبين وهي :

$$V_s = - \frac{q}{m} \vec{B} \cdot \vec{S} \quad (I.29)$$

وبالتالي يصبح الهاملتوني (I.28) بالشكل :

$$H = \frac{1}{2m} [\vec{P} - q\vec{A}(\vec{r}, t)]^2 + qV(\vec{r}, t) - \frac{q}{m} \vec{B} \cdot \vec{S} \quad (I.30)$$

يدعى الهاملتوني (I.30) هاملتوني باولي .

2- مسألة محلولة (II) :

ادرس حركة الكترون موجود في حقل تحريض مغناطيسي منتظم
ومتجانس .

الحل :

لندرس في البداية حركة الالكترون ، بدون أخذ السبين بعين
الاعتبار ، في الميكانيك الكلاسيكي . في الحقيقة ان الالكترون يخضع
لقوة لورنتز :

$$(II.1)$$

$$\vec{F} = q [\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})]$$

حيث \vec{v} سرعته . بمساواة هذه القوة مع قوة نيوتن نحصل على
المعادلة :

$$(II.2)$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

بفرض ان حقل التحريض المغناطيسي موجه باتجاه المحور oz ، بحل
معادلات الحركة (II.2) نحصل المركبات على المحاور :

$$x(t) = x_0 + r \cos(\omega_c t - \varphi_0) \quad (II.3a)$$

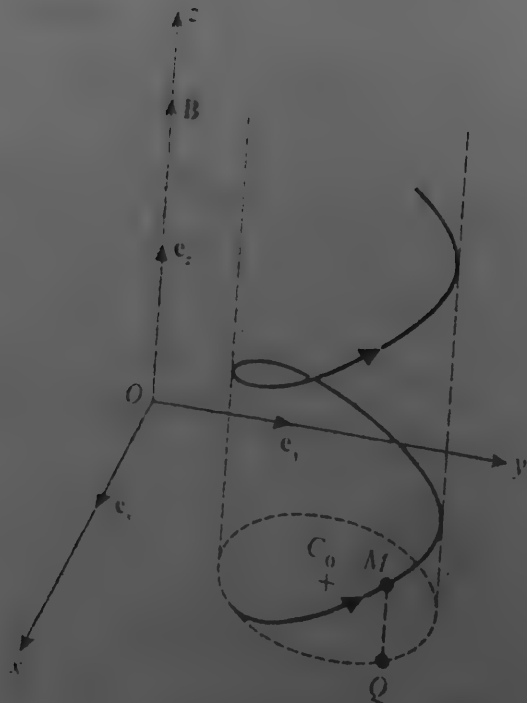
$$y(t) = y_0 + r \sin(\omega_c t - \varphi_0) \quad (II.3b)$$

$$z(t) = z_0 + v_z t \quad (II.3c)$$

حيث x_0 و y_0 و z_0 و φ_0 و v_z ثوابت تتعلق بالشروط البدائية
و النصف السيكلوتروني .

$$\omega_c = -q \frac{B}{m} \quad (II.4)$$

وتظهر المعادلات (II.3) ان مسقط حركة الالكترون على المستوى xy يمثل
حركة دائرية منتظمة ، سرعتها الزاوية ω_c ، وطورها البدائي
 φ_0 ، ونصف قطر الدائرة التي ترسمها الحركة r واحداثيات
مركزها C_0 هي x_0 و y_0 . اما مسقطها على المحور z فهو حركة
مستقيمة منتظمة . وهكذا فان الالكترون يقوم بحركة على لولب
محوره مواز للمحور z ويمر من C_0 الشكل (7.4) .



شكل (7.4)

المسار الكلاسيكي لالكترون
موجود في حقل تحريض
مغناطيسي متجانس ومنتظم
مواز للمحور z ، يتحرك
الالكترون على مسار لولبي
وبسرعة ثابتة ، على لولب
محوره مواز للمحور z ويمر
من C_0 .

أما من الناحية الكوانتية فنلاحظ ان حقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}(\vec{r})$ يرتبط بالكمون الشعاعي $\vec{A}(\vec{r})$ حسب ماييلي :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (\text{II.5})$$

يمكن ان يباخذ الكمون الشعاعي $\vec{A}(\vec{r})$ في حالة كون حقل التحريض المغناطيسي المتجانس ، الشكل التالي :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \quad (\text{II.6})$$

فتكون مركبات الكمون الشعاعي على المحاور الاحداثية :

$$A_x = -\frac{1}{2} B_y \quad (\text{II.7a})$$

$$A_y = \frac{1}{2} B_x \quad (\text{II.7b})$$

$$A_z = 0 \quad (\text{II.7c})$$

ويصبح الهاملتوني ، بالاعتماد على العلاقة (II.7) من المسألة (I) من الشكل :

$$H = \frac{1}{2m} [\vec{P} - q\vec{A}]^2 = \frac{1}{2m} \{ [P_x - qA_x]^2 + [P_y - qA_y]^2 + [P_z - qA_z]^2 \} \quad (\text{II.8})$$

وبما أن قوة لورنتز (II.1) لا تشتق من كمون ، فان الطاقة الكلية هي طاقة حركية فقط وهذا يعني أنه باستطاعتنا ادخال مفهوم السرعة المعممة \vec{V} بحيث يكون الهاملتوني (II.8) من الشكل :

$$H = \frac{1}{2} m \vec{V}^2 = \frac{1}{2} m (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \quad (\text{II.9})$$

وبمساواة مركبات H على المحاور الاحداثية في المعادلتين (II.9) و (II.9) نحصل على العلاقات التالية :

$$m v_x = p_x + \frac{qB}{2} y$$

(II.10a)

$$m v_y = p_y - \frac{qB}{2} x$$

(II.10b)

$$m v_z = p_z$$

(II.10c)

وهكذا نستطيع كتابة الهاملتوني بشكل مجموع هاملتونين : أحدهما H_1 يتعلق بالمتحول z فقط والثاني H_2 يتعلق بالمتحولين (x, y) فقط :

$$H = H_2 + H_1 =$$

$$= \frac{1}{2m} (v_x^2 + v_y^2) + \frac{p_z^2}{2m}$$

(II.11)

وبما أن H_1 يتعلق فقط بـ z و H_2 يتعلق فقط بـ x و y فان علاقات التبادل التالية محققة :

$$[H, H_1] = [H, H_2] = [H_1, H_2] = 0$$

(II.12)

وهذا يقتضي بأن التابع الموجي $\psi(x, y, z)$ الذي يصف الالكترون هو عبارة عن جداء تابعين أحدهما $\psi(x, y)$ متعلق فقط بالمتحولين x, y والثاني $\chi(z)$ متعلق فقط بالمتحول z :

$$\psi(x, y, z) = \psi(x, y) \chi(z)$$

(II.13)

وتكون القيمة الخاصة E_{tot} المقابلة للتابع $\psi(x, y, z)$ مكونة من مجموع القيمة الخاصة E_1 المقابلة للتابع $\chi(z)$ والقيمة الخاصة E_2 المقابلة للتابع $\psi(x, y)$ حيث :

$$E_{tot} = E_1 + E_2$$

(II.14)

يصف الهاملتوني H_1 :

$$H_1 = \frac{p_z^2}{2m}$$

(II.15)

حركة جسيم حر يتحرك حسب المحور z ، ونعلم أن توابعه الخاصة

هي عبارة عن أمواج مستوية مقابلة للقيم الخاصة التالية :

$$\chi(z) = A e^{i k_z z} \quad (II.16a)$$

$$E_1(z) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (II.16b)$$

وبذكرنا الهاملتوني :

$$H_2 = \frac{1}{2m} (V_x^2 + V_y^2) \quad (II.17)$$

بالهاملتوني الذي يصف الهزاز التوافقي البسيط :

$$H_{osc} = \frac{\hbar \omega}{2} (\hat{p}^2 + \hat{q}^2) \quad (II.18)$$

بحيث تحقق \hat{q} و \hat{p} علاقة التبادل التالية :

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i \quad (II.19)$$

لنوجد تبادل V_x و V_y :

$$\begin{aligned} [V_x, V_y] &= \left[\frac{1}{m} \left(p_x + \frac{qB}{2} y \right), \frac{1}{m} \left(p_y - \frac{qB}{2} x \right) \right] = \\ &= \frac{1}{m^2} \left\{ [p_x, p_y] - \frac{qB}{2} [p_x, x] + \frac{qB}{2} [y, p_y] - \frac{q^2 B^2}{4} [y, x] \right\} = \\ &= \frac{1}{m^2} \left[-\frac{qB}{2} (-i\hbar) + \frac{qB}{2} (i\hbar) \right] = i\hbar \frac{qB}{m^2} \end{aligned} \quad (II.20)$$

ليصف الهاملتوني (II.17) هزازاً توافقياً بسيطاً يكفي أن نفرض :

$$(II.21a)$$

$$V_x = \frac{m}{\sqrt{qB}} V_x' \quad (II.21b)$$

$$V_y = \frac{m}{\sqrt{qB}} V_y'$$

ليكون مبادلهما :

$$(II.22)$$

$$[V_x', V_y'] = i$$

وهكذا يكتب H_2 بالشكل :

$$H_2 = \frac{1}{2} \hbar \frac{qB}{m} (V_x^2 + V_y^2) = \frac{\hbar \omega_c}{2} (V_x^2 + V_y^2) \quad (\text{II.23})$$

وهو شكل الهاملتوني نفسه (II.18)، وبذلك تكون طاقته الخاصة :

$$E_2 = E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c \quad : (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{II.24})$$

المقابلة للتوابع الخاصة :

$$\psi_n = H_n(V_x) e^{-V_x^2/2} \quad (\text{II.25})$$

حيث $H_n(x)$ كثيرة حدود هرميت :

$$H_n(x) = (2x - \frac{d}{dx})^n x \quad (\text{II.26})$$

وهكذا يكون الحل العام من الشكل :

$$\psi(x, y, z) = \psi_n(x, y) \chi(z) \quad (\text{II.27})$$

المقابل للقيم الخاصة :

$$E_{\text{tot}} = E_2(x, y) + E_1(z) = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad : (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{II.28})$$

تسمى سويات الطاقة (II.28) سويات لاندوا (Niveaux de Landau)، ونلاحظ أن الطاقة المقابلة للحركة على المحور z غير مكتمة بينما هي مكتمة بالنسبة للحركة في المستوى xy .

الجسيمات المتطابقة - مبدأ باولي

54- الجسيمات المتطابقة - تعريف :

نقول عن جسيمين انهما متطابقين اذا كان لهما الخصائص الذاتية نفسها (كتلة ، سبين ، شحنة ، الخ ...) . هكذا فان جميع الالكترونات الموجودة في الكون متطابقة ، و بالمثل جميع البروتونات وجميع ذرات الهيدروجين أيضاً . ان هذا التعريف يقودنا الى النتيجة الهامة التالية : لا يغير تبديل دُورَي جسيمين متطابقين مكوّنين لجملة فيزيائية من خواصها ولايؤثر في تطورها مع الزمن .
يجب ان نلاحظ ان هذا التعريف مستقل عن الشروط التجريبية التي ندرس فيها الجسيمات .

55- الجسيمات المتطابقة في الميكانيك الكلاسيكي:

لاتسبب دراسة الجملة الفيزيائية المكوّنة من جسيمات متطابقة أية صعوبات في الميكانيك الكلاسيكي ، وذلك ناتج عن أن كل جسيم ، من جسيمات الجملة ، يتحرك وفق مسار محدد تماماً ، الأمر الذي يسمح بتمييز الجسيمات بعضها عن بعض وبمتابعة حركتها أثناء تطور حالة الجملة مع الزمن .

لتوضيح هذه النقطة لندرس جملة مكونة من جسيمين متطابقين. في الحقيقة، في الميكانيك الكلاسيكي، تحدد حالة الجملة تماماً في اللحظة البدائية t_0 بالمعطيات التي تحدد موضعي وسرعتي الجسيمين المكونين لها في هذه اللحظة، ولتكن $\{\vec{r}_0, \vec{v}_0\}$ و $\{\vec{r}'_0, \vec{v}'_0\}$ لنرمز بـ $\vec{r}_1(t)$ و $\vec{v}_1(t)$ لموضع وسرعة الجسيم (1) في اللحظة t وبـ $\vec{r}_2(t)$ و $\vec{v}_2(t)$ لموضع وسرعة الجسيم (2) في اللحظة نفسها. ان كون الجسيمين متطابقين يعطي أنه يمكن وصف الحالة الفيزيائية البدائية بشكلين مختلفين، في الحقيقة نستطيع اما أن نفرض أن :

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1(t_0) &= \vec{r}_0 & , & & \vec{r}_2(t_0) &= \vec{r}'_0 \\ \vec{v}_1(t_0) &= \vec{v}_0 & , & & \vec{v}_2(t_0) &= \vec{v}'_0 \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

أو بالعكس :

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1(t_0) &= \vec{r}'_0 & , & & \vec{r}_2(t_0) &= \vec{r}_0 \\ \vec{v}_1(t_0) &= \vec{v}'_0 & , & & \vec{v}_2(t_0) &= \vec{v}_0 \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

لندرس الآن تطور الجملة مع الزمن، ولنفرض أن حل جملة معادلات الحركة المعطاة بالشروط البدائية (8.1) هي :

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}(t) \quad , \quad \vec{r}_2(t) = \vec{r}'(t) \quad (8.3)$$

حيث $\vec{r}(t)$ و $\vec{r}'(t)$ توابع شعاعية. بما أن الجسيمين متطابقان فان تبديل دوريهما لا يغير من خواص الجملة المكونة لهما ولا يؤثر في تطورها مع الزمن وهذا يقود الى أن حل جملة معادلات الحركة المعطاة بالشروط البدائية (8.2) هي بالضرورة :

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}'(t) \quad , \quad \vec{r}_2(t) = \vec{r}(t) \quad (8.4)$$

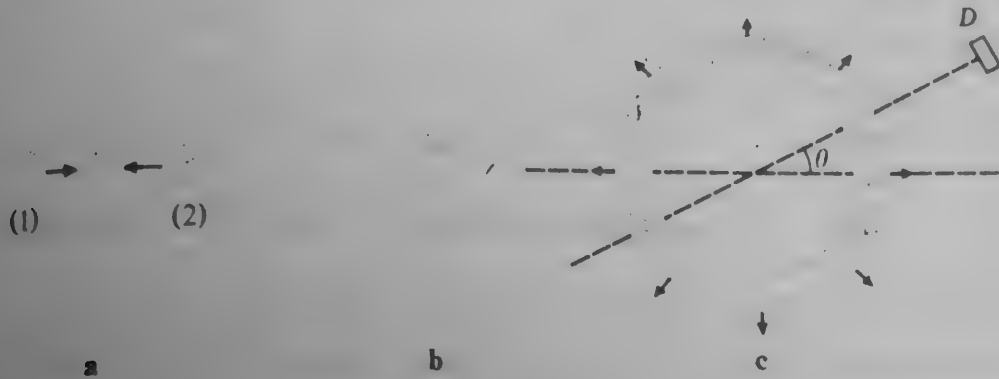
حيث $\vec{r}(t)$ و $\vec{r}'(t)$ هي التوابع المعطاة نفسها في (8.3). نلاحظ أن الوصفين الرياضييين الممكنين للحالة الفيزيائية متكافئان تماماً لأنهما يقودان الى التوقع الفيزيائي نفسه التالي : ان الجسيم الذي انطلق من $\{\vec{r}_0, \vec{v}_0\}$ في اللحظة البدائية t_0 موجود في $\vec{r}(t)$ في اللحظة

$\vec{v}(t) = d\vec{r}/dt$ وبسرعة $\vec{v}(t)$ وذلك الذي انطلق من $\{\vec{r}_0, \vec{v}_0\}$ موجود في اللحظة البدائية احدى الصيغتين الرياضيتين الممكنتين ونهمل وجود الأخرى بذلك نعالج الجملة كما لو أن الجسمين المكوّنين لهما مختلفان وليسا متطابقين وكما لسوا أن الرقمين (1) و (2) اللذين المقناهما بالجسيمين ، بشكل عشوائي ، في اللحظة t_0 ، صفتان ذاتيتان تميزانهما : بما أننا نستطيع متابعة كل جسم على مساره المحدد تماما فاننا نستطيع وفي كل لحظة أن نعرف أين يقع الجسم (1) ، وأين يقع الجسم (2) .

56 - الجسيمات المتطابقة في الميكانيك الكوانتي :

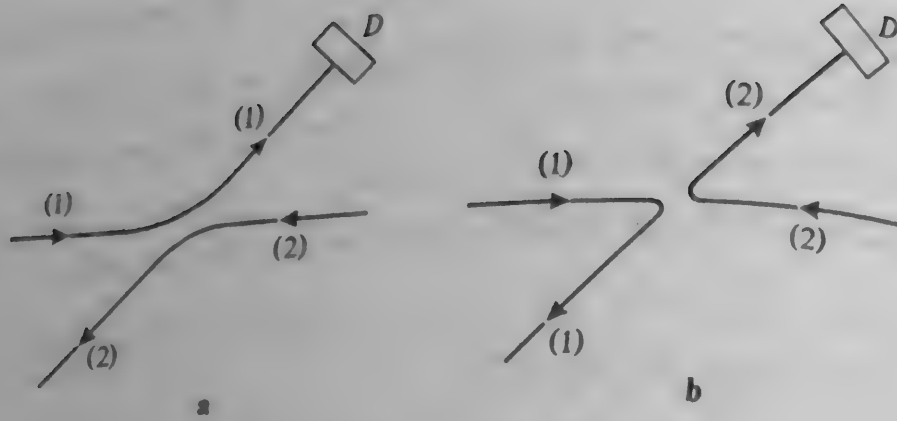
ان دراسة الجمل الفيزيائية المكوّنة من جسيمات متطابقة في الميكانيك الكوانتي تختلف بشكل جذري عنها في الميكانيك الكلاسيكي حيث أن المسار ليس له أي معنى حسب مبدأ عدم التعيين لهاينزبرغ . ولتوضيح هذا الاختلاف نعود الى الجملة المكوّنة من جسيمين متطابقين ، ولنفرض أننا استطعنا تعيين موضعي الجسمين في اللحظة t_0 هذا يعني أن التابعين الموجيين المرافقين لهما معينان تماما . لتخيل الآن تجربة يحدث فيها التصادم بين الجسمين في جملة مركز كتلتهم ، الشكل (8.1) . يتجه الجسيما أحدهما نحو الآخر قبل حدوث التصادم ، لنعط الرقم (1) للجسيم القادم من الجهة اليسارية والرقم (2) للجسيم القادم من الجهة اليمينية ، الشكل (8.1a) ، من ثم تتداخل التوابع الموجية عند التصادم ، الشكل (8.1b) ، أما بعد التصادم فكان للمنطقة من الفضاء ، التي تعطي قيما محسوسة لاحتمال وجود الجسمين ، شكل طوق كروي يزداد نصف قطره مع الزمن ، يظهر الشكل (8.1c) شكلاً تخطيطياً لها . لنفرض أن عداد D ، يصنع زاوية θ مع السرعة البدائية للجسيم (1) ، استطاع التقاط أحد الجسمين ، فان الجسيم الآخر ، وحسب مبدأ انحفاظ كمية الحركة ، سيتحرك بالاتجاه المعاكس للاتجاه الموجود به العداد D ، في الحقيقة من المستحيل علينا تحديد

أي من الجسمين التلق العداد وذلك لوجود طريقين ممكنين يمكن
للجمل أن تسلكهما اعتباراً من الحالة البدائية إلى الحالة النهائية
التي حصلنا عليها بعد القياس . والشكل (8.4) يوضح هذين الطريقين
بشكل تخطيطي في e و b فيه ، هذا ما يسمى بانطباق (تحليل)
التبديل .



شكل (8.4)

تمثيل تخطيطي للتابعين الموجيين اللذين يمثلان اصطدام
جسيمين متطابقين . (a) يتجه التابعان الموجيان الواحد
نحو الآخر قبل التصادم . (b) يتداخل التابعان
الموجيان أثناء التصادم . (c) للمنطقة من الفضاء التي
تعطي قيمة محسوسة لاحتمال وجود الجسيمين شكل طوق
كروي ، وبما أن الجسيمين متطابقان فإنه من المستحيل
علينا ، عندما يلتقط العداد D جسماً ، أن نعرف أي تابع
موجي كان مرافقاً له قبل التصادم (1) أم (2) .



شكل (8.2)

تمثيل تخطيطي للطريقتين التي يمكن للجملـة أن تسلكهما اعتباراً من الحالة البدائية وحتى الحالة النهائية الموجودة بعد القياس . نظراً لـ كـون الجسيمات متطابقة لاشيء يسمح لنا بتحديد أي الطريقين اتبعت .

من هنا تكمن الصعوبة في تطبيق مسلمات الميكانيك الكوانتي ، حيث أنه لحساب احتمال حصولنا على نتائج أحد القياسات ينبغي معرفة الشعاع الذي يمثل الحالة البدائية للجملـة والشعاع الذي يمثل حالتها النهائية . ان الحالة البدائية ، في تجربتنا ، معينة بشعاع وحيد أما من أجل الحالة النهائية فاننا نستطيع كتابة شعاعين يقابلان الطريقين الممثلين في الشكلين (8.2a) و (8.2b) ، وهذان الشعاعان يقابلان الحالة النهائية للجملـة . اذن من أجل حساب احتمال حصولنا على نتائج أحد القياسات هل نختار الشعاع الذي يمثل الطريق (8.2a) ؟ أو هل نختار الشعاع الذي يمثل الطريق (8.2b) ؟ يمكن أن نفكر بالأخذ بعين الاعتبار الشعاعين معا ولكن في هذه الحالة هل نأخذ مجموع طويلتي الاحتمالين ؟ أم نأخذ الفرق ؟ سنرى مستقبلا أن كل حالة من الحالات المذكورة سابقاً تعطينا نتيجة مختلفة عن الأخرى .

57 - مؤثر التبديل :

نأخذ جملة مكونة من جسيمين مختلفين لهما السبين نفسه ،
بروتون والكترون على سبيل المثال ، لنختار القاعدة $\{|u_i\rangle\}$ التي
تصف الجسيم (1) ، بروتون ، والقاعدة $\{|u_j\rangle\}$ التي تصف الجسيم (2) ،
الالكترون ، ان القاعدة التي تصف الجملة الكلية هي الجداء التنسوري
للقاعدتين ولنكتبها على الشكل :

$$\{|1:u_i, 2:u_j\rangle\} \quad (8.5)$$

يجب أن نلاحظ هنا أن ترتيب الأشعة في هذه القاعدة ليس له أهمية
هذه القاعدة ليس لها أهمية هذا يعني أن :

$$|1:u_i, 2:u_j\rangle \equiv |2:u_j, 1:u_i\rangle \quad (8.6)$$

ولكن يجب أن ننتبه إلى أنه في الحالة التي يكون فيها $i \neq j$ فإن :

$$|1:u_i, 2:u_j\rangle \neq |2:u_i, 1:u_j\rangle \quad (8.7)$$

نعرف المؤثر الخطي \hat{P}_{21} ونسميه مؤثر التبديل بالشكل :

$$\hat{P}_{21} |1:u_i, 2:u_j\rangle = |2:u_i, 1:u_j\rangle = |1:u_j, 2:u_i\rangle \quad (8.8)$$

58 - خواص مؤثر التبديل :

نلاحظ أنه إذا طبقنا المؤثر \hat{P}_{21} مرة ثانية فاننا سنعيد
الشعاع إلى حالته البدائية :

$$(\hat{P}_{21})^2 |1:u_i, 2:u_j\rangle = \hat{P}_{21} |2:u_i, 1:u_j\rangle = |1:u_i, 2:u_j\rangle \quad (8.9)$$

هذا يعني أن :

$$(\hat{P}_{21})^2 = 1 \quad (8.10)$$

ان مؤثر التبديل هرميتي وهذا يعني أن :

$$(8.11)$$

$$\hat{P}_{21}^\dagger = \hat{P}_{21}$$

للبرهان على صحة ذلك يكفي أن نبرهن أن كل عنصر من عناصر المصفوفة
التي تمثل \hat{P}_{21} يساوي العنصر المقابل له في المصفوفة الممثلة لـ \hat{P}_{21}^\dagger

في الحقيقة أن عناصر المصفوفة الممثلة لـ \hat{P}_{21} هي من الشكل :

$$\langle 1:u, 2:u | \hat{P}_{21} | 1:u, 2:u \rangle = \langle 1:u, 2:u | \hat{P}_{21} | 1:u, 2:u \rangle \quad (8.12)$$

وبالمقابل أن عناصر المصفوفة الممثلة لـ \hat{P}_{21}^+ لها الشكل :

$$\langle 1:u, 2:u | \hat{P}_{21}^+ | 1:u, 2:u \rangle = \langle 1:u, 2:u | \hat{P}_{21} | 1:u, 2:u \rangle^* = \langle 1:u, 2:u | \hat{P}_{21} | 1:u, 2:u \rangle = \langle 1:u, 2:u | \hat{P}_{21} | 1:u, 2:u \rangle \quad (8.13)$$

بالمقارنة بين العلاقتين (8.12) و (8.13) نجد أن كل عنصر من عناصر المصفوفة التي تمثل المؤثر \hat{P}_{21} يساوي العنصر المقابل له في المصفوفة الممثلة للمؤثر \hat{P}_{21}^+ ، الأمر الذي يبرهن صحة العلاقة (8.11).
ينتج مباشرة من العلاقتين (8.14) و (8.15) أن :

$$\hat{P}_{21}^+ \hat{P}_{21} = \hat{P}_{21} \hat{P}_{21}^+ = 1 \quad (8.14)$$

9- الأشعة المتناظرة والأشعة اللامتناظرة :

إن المؤثر \hat{P}_{21} هرميتي حسب العلاقة (8.11) وبالتالي فإن قيمه الخاصة حقيقية . نلاحظ أن مربع هذه القيم يساوي الواحد حسب العلاقة (8.9) هذا يعني أن القيم الخاصة لـ \hat{P}_{21} هي بكل بساطة ± 1 . نسمي الشعاع الخاص لـ \hat{P}_{21} المقابل للقيمة الخاصة $+1$ شعاعاً متناظراً والشعاع الخاص مقابل للقيمة الخاصة -1 شعاعاً لامتناظراً إذ يكون لدينا :

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}_{21} | \psi_s \rangle &= | \psi_s \rangle \\ \hat{P}_{21} | \psi_a \rangle &= - | \psi_a \rangle \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{شعاع متناظر} \\ \text{شعاع لامتناظر} \end{array} \quad (8.15)$$

نعرف المؤثرين \hat{S} و \hat{A} بالشكل :

$$\hat{S} = \frac{1}{2} (1 + \hat{P}_{21})$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2} (1 - \hat{P}_{21}) \quad (8.16a)$$

(8.16b)

ان المؤثرين \hat{S} و \hat{A} هما مؤثرا اسقاط وهذا واضح من العلاقة

$$\hat{S}^2 = \hat{S} \quad (8.16) \text{ حيث نجد :}$$

$$\hat{A}^2 = \hat{A} \quad (8.17a)$$

وهما أيضاً مؤثرا اسقاط في فراغين جزئيين متعامدين ، من العلاقة (8.16) نفسها نجد :

$$\hat{A}\hat{S} = \hat{S}\hat{A} = 0 \quad (8.18)$$

بالاضافة الى ذلك فان هذين الفراغين الجزئيين متتامان وهذا ينتج من التعريف (8.16) :

$$\hat{S} + \hat{A} = 1 \quad (8.19)$$

أما العلاقة (8.11) فانها توضح لنا أنهما هرميتيان :

$$\hat{S}^+ = \hat{S} \quad (8.20a)$$

$$\hat{A}^+ = \hat{A} \quad (8.20b)$$

واذا كان الشعاع $|\psi\rangle$ شعاعا كيفيا من فراغ حالات الجملة المدروسة فان الشعاع $\hat{S}|\psi\rangle$ شعاع متناظر والشعاع $\hat{A}|\psi\rangle$ شعاع لامتناظر. ففي الحقيقة ان هذه النتيجة تنتج مباشرة من العلاقة (8.16)

$$\hat{P}_{\pm} \hat{S} |\psi\rangle = \hat{S} |\psi\rangle \quad (8.21a)$$

$$\hat{P}_{\pm} \hat{A} |\psi\rangle = -\hat{A} |\psi\rangle \quad (8.21b)$$

لهذا السبب نسمي المؤثر \hat{S} مؤثر التناظر و \hat{A} مؤثرا لا تناظر.

60 - تحولات الملحوظات الفيزيائية بواسطة التبديل :

نفرض أن أشعة القاعدة $\{|u_i\rangle\}$ ، التي تصف الجسيم (1) ، هي أشعة خاصة للملحوظ الفيزيائي $\hat{B}(1)$ مقابل للقيم الخاصة i ، وان أشعة القاعدة $\{|u_j\rangle\}$ ، التي تصف الجسيم (2) ، هي أشعة خاصة للمؤثر $\hat{B}(2)$ مقابلة للقيم الخاصة j ولنوجد تأثير المؤثر $\hat{P}_{\pm}^+ \hat{B}(1) \hat{P}_{\pm}$ على

نحتاج كفي من القاعدة المعطاة بالعلاقة (8.5) :

$$\begin{aligned} \hat{P}_{21} \hat{B}(1) \hat{P}_{21}^+ &= \hat{P}_{21} \hat{B}(1) |1, u_1, 2, u_2\rangle = \hat{P}_{21} |1, u_1, 2, u_2\rangle \\ &= \hat{P}_{21} |1, u_1, 2, u_2\rangle = |1, u_1, 2, u_2\rangle \end{aligned} \quad (8.21)$$

بتطبيق المؤثر $\hat{B}(2)$ مباشرة على الشعاع نفسه فاننا نحصل على النتيجة نفسها هذا يعطي أن :

$$\hat{P}_{21} \hat{B}(1) \hat{P}_{21}^+ = \hat{B}(2) \quad (8.23)$$

بالطريقة نفسها نجد أن :

$$\hat{P}_{21} \hat{B}(2) \hat{P}_{21}^+ = \hat{B}(1) \quad (8.24)$$

أما من أجل الملحوظات التي يدخل في تركيبها الدليلان (1) و (2) كما في $\hat{B}(1) + \hat{C}(2)$ أو $\hat{B}(1)\hat{C}(2)$ فاننا نحصل على نفس النتيجة حيث من أجل الملحوظ الفيزيائي $\hat{B}(1) + \hat{C}(2)$:

$$\hat{P}_{21} [\hat{B}(1) + \hat{C}(2)] \hat{P}_{21}^+ = \hat{P}_{21} \hat{B}(1) \hat{P}_{21}^+ + \hat{P}_{21} \hat{C}(2) \hat{P}_{21}^+ = \hat{B}(2) + \hat{C}(1) \quad (8.25)$$

وبالمثل من أجل الملحوظ الفيزيائي $\hat{B}(1)\hat{C}(2)$ وباعتماد على العلاقة (8.14) نجد :

$$\hat{P}_{21} \hat{B}(1) \hat{C}(2) \hat{P}_{21}^+ = \hat{P}_{21} \hat{B}(1) \hat{P}_{21}^+ \hat{P}_{21} \hat{C}(2) \hat{P}_{21}^+ = \hat{B}(2) \hat{C}(1) \quad (8.26)$$

يمكن تعميم هذه النتائج على جميع الملحوظات الفيزيائية التي يمكن التعبير عنها كتتابع لملاحظات فيزيائية من الشكل (1) و (2) والتي نرسم لها بالشكل $\hat{\theta}(1, 2)$ حيث نجد :

$$\hat{P}_{21} \hat{\theta}(1, 2) \hat{P}_{21}^+ = \hat{\theta}(2, 1) \quad (8.27)$$

حيث $\hat{\theta}(2, 1)$ عبارة عن ملحوظ فيزيائي حصلنا عليه بعد تبديل موضعي الدليلين (1) و (2) أينما وجدا .
نقول أن الملحوظ الفيزيائي $\hat{\theta}_2(1, 2)$ أنه تناظري اذا تحقق لدينا ميكانيك الكم ٢-١٦

$$\hat{\theta}_s(1,2) = \hat{\theta}_s(2,1) \quad (8.28)$$

بالرجوع الى العلاقة (8.27) نجد أن الملحوظات الفيزيائية التناظرية

$$\hat{P}_2, \hat{\theta}_s(1,2) = \hat{\theta}_s(2,1) \hat{P}_2, \quad (8.29)$$

هذا يعني أن جميع الملحوظات الفيزيائية التناظرية تقبل التبادل مع مؤثر التبديل .

61 - جمل تحتوي على N جسيم $(N > 2)$:

تختلف خواص مؤثرات التبديل في جملة مكوّنة من N جسيماً لها نفس السبين (حيث $N > 2$) عن خواص المؤثر \hat{P}_2 ، ولإعطاء فكرة عن هذا الاختلاف ندرس الحالة $N=3$.
نفرض أنه لدينا جملة مكوّنة من ثلاثة جسيمات مختلفة ولها نفس السبين ، تعطى أشعة القاعدة التي تصف هذه الجملة ، كما في الفقرة (57) ، بالشكل :

$$\{ | 1 : u_1 , 2 : u_2 , 3 : u_3 \rangle \} \quad (8.30)$$

نعرف على هذه القاعدة المؤثر الخطي \hat{P}_{npq} ، حيث أن المجموعة (n,p,q) هي عبارة عن تبديل كافي للأرقام $(1,2,3)$ على الترتيب ، بالشكل :

$$\hat{P}_{npq} | 1 : u_1 , 2 : u_2 , 3 : u_3 \rangle = | n : u_1 , p : u_2 , q : u_3 \rangle \quad (8.31)$$

نسمي المؤثر الخطي \hat{P}_{npq} مؤثر التبديل ولنوضح عمله على المثال التالي :

$$\begin{aligned} \hat{P}_{231} | 1 : u_1 , 2 : u_2 , 3 : u_3 \rangle &= | 2 : u_1 , 3 : u_2 , 1 : u_3 \rangle \\ &= | 1 : u_3 , 2 : u_1 , 3 : u_2 \rangle \quad (8.32) \end{aligned}$$

نلاحظ أنه لدينا $3! = 6$ مؤثرات تبديل من الشكل \hat{P}_{npq} في القاعدة (8.30) وهي :

$$\hat{P}_{123}, \hat{P}_{312}, \hat{P}_{231}, \hat{P}_{132}, \hat{P}_{321}, \hat{P}_{213} \quad (8.33)$$

وأن المؤثر \hat{P}_{123} هو مؤثر الواحدة لأن تأثيره على أي شعاع من القاعدة (8.30) يبقى الشعاع على حاله :

$$\hat{P}_{123} |1:u_i, 2:u_j, 3:u_k\rangle = |1:u_i, 2:u_j, 3:u_k\rangle \quad (8.34)$$

وهكذا وبالطريقة نفسها يمكن أن نعرف $N!$ مؤثر تبديل في جملة مكونة من N جسيما لهم السبين نفسه بحيث يكون أحد هذه المؤثرات هو مؤثر الواحدة .

ان مجموعة مؤثرات التبديل تشكل زمرة، يمكن البرهان على ذلك على مجموعة المؤثرات (8.33) :

1 - ان هذه المجموعة تحتوي على عنصر الواحدة وهو \hat{P}_{123} حسب العلاقة (8.34) .

2 - ناتج جداء مؤثري تبديل هو أيضا مؤثر تبديل وسنرى على سبيل المثال أن :

$$\hat{P}_{312} \hat{P}_{112} = \hat{P}_{321} \quad (8.35)$$

من أجل ذلك نؤثر بالطرف الأول من العلاقة (8.35) على شعاع كعسي من أشعة القاعدة (8.30) :

$$\begin{aligned} \hat{P}_{312} \hat{P}_{112} |1:u_i, 2:u_j, 3:u_k\rangle &= \hat{P}_{312} |1:u_i, 3:u_k, 2:u_j\rangle = \\ &= \hat{P}_{312} |1:u_i, 2:u_k, 3:u_j\rangle = \\ &= |3:u_i, 1:u_k, 2:u_j\rangle = \\ &= |1:u_k, 2:u_j, 3:u_i\rangle \quad (8.36) \end{aligned}$$

ونجد أن تأثير \hat{P}_{321} يعطي نفس النتيجة :

$$\hat{P}_{321} |1:u_i, 2:u_j, 3:u_k\rangle = |1:u_k, 2:u_j, 3:u_i\rangle =$$

$$= |1:u_k, 2:u_j, 3:u_i\rangle \quad (8.37)$$

3 - لكل مؤثر تبديل عنصر نظير هو بدوره مؤثر تبديل ،
 فإذا اتبعنا الخطوات نفسها كما في 2 يمكن أن نبرهن :

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}_{123}^{-1} &= \hat{P}_{123} , \quad \hat{P}_{312}^{-1} = \hat{P}_{312} , \quad \hat{P}_{231}^{-1} = \hat{P}_{231} , \\ \hat{P}_{132}^{-1} &= \hat{P}_{132} , \quad \hat{P}_{213}^{-1} = \hat{P}_{213} , \quad \hat{P}_{321}^{-1} = \hat{P}_{321} , \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

بذلك نكون قد برهنا على أن المجموعة (8.33) تشكل زمرة ولكن
 يجب ملاحظة أن هذه المؤثرات لاتقبل التبادل فيما بينها . ولنبيين
 على سبيل المثال أن :

$$[\hat{P}_{312}, \hat{P}_{132}] = \hat{P}_{312}\hat{P}_{132} - \hat{P}_{132}\hat{P}_{312} \neq 0 \quad (8.39)$$

كما قد برهنا سابقاً أن $\hat{P}_{312}\hat{P}_{132} = \hat{P}_{321}$ وباتباع الطريقة نفسها نجد أن :

$$\hat{P}_{132}\hat{P}_{312} = \hat{P}_{213} \neq \hat{P}_{321} = \hat{P}_{312}\hat{P}_{132} \quad (8.40)$$

نعرف مؤثر النقل بأنه مؤثر تبديل يغير دوري جسيمين فقط
 دون أن يؤثر على الجسيمات الأخرى * . ان المؤثرات $\hat{P}_{132}, \hat{P}_{321}, \hat{P}_{213}$
 هي مثلاً مؤثرات نقل .

في الحقيقة يمكننا البرهان على أن كل مؤثرات النقل هي
 مؤثرات هرميتية وأنها مؤثرات واحدة وأن كل مؤثر نقل يتطابق
 مع نظيره وذلك باتباع الطريقة نفسها التي برهنا فيها على صحة
 العلاقات (8.10) و (8.11) و (8.14) . لمؤثرات النقل أهمية كبرى
 حيث أنه يمكننا تحليل كل مؤثر تبديل الى جداء مجموعة من
 مؤثرات النقل . يمكننا كتابة مؤثر التبديل الثاني من المجموعة
 (8.33) على الشكل :

$$\hat{P}_{312} = \hat{P}_{132}\hat{P}_{213} = \hat{P}_{321}\hat{P}_{132} = \hat{P}_{213}\hat{P}_{321} = \hat{P}_{132}\hat{P}_{213}(\hat{P}_{132})^2 = \dots \quad (8.41)$$

* (يتطابق مؤثر التبديل مع مؤثر النقل في حالة كون $N=2$)

ان تحليل مؤثر تبديل ما الى جداء مجموعة من مؤثرات النقل ليس وحيداً، ولكن يمكننا البرهان على أن ازدواجية عدد مؤثرات النقل التي يتحلل اليها مؤثر تبديل معين هي دوماً نفسها : نسمي هذه الازدواجية بازدواجية مؤثر التبديل . هكذا نجد أن مجموعة المؤثرات $\hat{P}_{12}, \hat{P}_{21}, \hat{P}_{13}, \hat{P}_{31}, \hat{P}_{23}, \hat{P}_{32}$ هي مؤثرات زوجية ومجموعة المؤثرات $\hat{P}_{12}, \hat{P}_{21}, \hat{P}_{13}, \hat{P}_{31}, \hat{P}_{23}, \hat{P}_{32}$ مؤثرات فردية .

يما أنه يمكننا تحليل كل مؤثر تبديل الى جداء مجموعة من مؤثرات النقل وبما أن كل مؤثر نقل هو مؤثر واحد اذن كل مؤثر تبديل هو مؤثر واحد ولكنه ليس بالضرورة هرميتياً لأن مؤثرات النقل لا تقبل التبادل بعضها عن بعض في الحالة العامة .
وأخيراً نلاحظ أن لمرافق مؤثر التبديل نفس ازدواجية مؤثر التبديل الذي هو مرافقه حيث أنه يساوي جداء نفس مؤثرات النقل مرتبة بشكل عكسي .

64- الأشعة المتناظرة ، والأشعة اللامتناظرة لجملة N جسيم :

وجدنا سابقاً أن مؤثرات التبديل لا تقبل التبادل فيما بينها في حالة كون $N > 2$ هذا يعني لا يمكننا ايجاد مجموعة متكاملة من الأشعة الخاصة المشتركة لهذه المؤثرات . غير أنه سنجد أن هناك مجموعة معينة من الأشعة التي يمكن أن تكون أشعة خاصة مشتركة لهذه المؤثرات .

ليكن \hat{P}_α مؤثر تبديل ما في جملة مكونة من N جسيماً لها نفس السبين. نسمي الشعاع $|\psi_\alpha\rangle$ ، الشعاع الكيفي من فراغ حالات الجملة ، شعاعاً متناظراً اذا تحقق لدينا :

$$\hat{P}_\alpha |\psi_\alpha\rangle = |\psi_\alpha\rangle$$

(8.42)

ونسمي الشعاع $|\psi'_\alpha\rangle$ الشعاع الكيفي من فراغ حالات الجملة ، شعاعاً لامتناظراً اذا تحقق :

$$\hat{P}_\alpha |\psi'_\alpha\rangle = \epsilon_\alpha |\psi'_\alpha\rangle$$

(8.43)

حيث :

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } \hat{P}_\alpha \text{ مؤثر تبديل زوجي } \dots \epsilon_\alpha = +1 \\ \text{إذا كان } \hat{P}_\alpha \text{ مؤثر تبديل فردي } \dots \epsilon_\alpha = -1 \end{array} \right\} \quad (8.44)$$

تشكل مجموعة الأشعة المتناظرة ومجموعة الأشعة اللامتناظرة فراغين جزئيين $\mathcal{E}_A, \mathcal{E}_S$ من فراغ حالات الجملة \mathcal{E} .
نعرف المؤثرين :

$$\hat{S} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} \quad (8.45)$$

$$\hat{A} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} \quad (8.46)$$

حيث أن الجمع يتم على $N!$ تبديلاً ممكناً لـ N وحيث ϵ_{α} معرفة فسي
(8.44). سنبين أن \hat{A} و \hat{S} مؤثران إسقاط في الفراغات الجزئية
 \mathcal{E}_A و \mathcal{E}_S على الترتيب. نسمي المؤثر \hat{S} مؤثر التناظر و \hat{A} مؤثر
اللاتناظر.

ان المؤثرين \hat{S} و \hat{A} هما مؤثران هرميتيان أي أن :

$$\hat{S}^+ = \hat{S} \quad (8.47)$$

$$\hat{A}^+ = \hat{A} \quad (8.48)$$

وهذا واضح من التعريف ومن الفقرة (٥٩). ومن جهة أخرى نفرض أن
 \hat{P}_{α_0} مؤثر تبديل كيفي فإنه لدينا :

$$\hat{P}_{\alpha_0} \hat{S} = \hat{S} \hat{P}_{\alpha_0} = \hat{S} \quad (8.49)$$

$$\hat{P}_{\alpha_0} \hat{A} = \hat{A} \hat{P}_{\alpha_0} = \epsilon_{\alpha_0} \hat{A} \quad (8.50)$$

ان هذه العلاقات تنتج من أن المؤثر $\hat{P}_{\alpha_0} \hat{P}_{\alpha}$ هو أيضاً مؤثر تبديل
حيث :

$$\hat{P}_{\alpha_0} \hat{P}_{\alpha} = \hat{P}_{\beta}$$

وذلك بفرض أن :

$$(8.51)$$

$$\epsilon_{\beta} = \epsilon_{\alpha_0} \epsilon_{\alpha}$$

في الحقيقة إذا ثبتنا \hat{P}_α وجعلنا \hat{P}_α يأخذ شكل متناهي جميع
التبديلات الممكنة فإن \hat{P}_α يعطي أيضاً جميع التبديلات الممكنة، ولكن
بترتيب مختلف، بالنتيجة:

$$\hat{P}_\alpha \hat{S} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \hat{P}_\alpha \hat{P}_\alpha = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \hat{P}_\alpha = \hat{S} \quad (8.53)$$

$$\hat{P}_\alpha \hat{A} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \hat{P}_\alpha \hat{P}_\alpha = \frac{1}{N!} \epsilon_{\alpha} \sum_{\alpha} \hat{P}_\alpha = \epsilon_{\alpha} \hat{A} \quad (8.54)$$

وبالطريقة نفسها نبرهن على المساواة عند ضرب \hat{S} و \hat{A} من اليمين
بـ \hat{P}_α ، ومن جهد أخرى نلاحظ أن المعادلات (8.41) و (8.54) تعطيان
مباشرة أن:

$$\hat{S}^2 = \hat{S} \quad (8.55)$$

$$\hat{A}^2 = \hat{A} \quad (8.56)$$

في الحقيقة يمكننا أن نكتب:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \hat{P}_\alpha \hat{S} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \hat{S} = \hat{S} \quad (8.57)$$

$$\hat{A}^2 = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \hat{P}_\alpha \hat{A} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha}^2 \hat{A} = \hat{A} \quad (8.58)$$

لأن كل مجموع يحتوي على $N!$ حد .
ومن جهة أخرى فإن:

$$\hat{A} \hat{S} = \hat{S} \hat{A} = 0 \quad (8.59)$$

لأن:

$$\hat{A} \hat{S} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \hat{P}_\alpha \hat{S} = \frac{1}{N!} \hat{S} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} = 0 \quad (8.60)$$

لأن نصف الأعداد ϵ_{α} مساوٍ لـ $+1$ ونصفها الآخر مساوٍ لـ -1 .

بذلك نكون قد برهنا على أن \hat{A} و \hat{S} هما عبارة عن مؤثر شري اسقاط في \mathcal{E}_A و \mathcal{E}_S على الترتيب، ولهذا فان تأثيرهما على شعاع $|\psi\rangle$ من فراغ حالات الجملة يعطي اما شعاعاً متناظراً أو شعاعاً لامتناظراً .

في الحقيقة من العلاقات (8.49) و (8.50) نجد أن :

$$\hat{P}_A \hat{S} |\psi\rangle = \hat{S} |\psi\rangle \quad (8.61)$$

$$\hat{P}_A \hat{A} |\psi\rangle = \hat{A} |\psi\rangle \quad (8.62)$$

يجب أن نلاحظ هنا أنه من أجل $N > 2$ أن مؤثر التناظر ومؤثر شري اللاتناظر ليسا مؤثر شري اسقاط في فراغين جزئيين متتامين ، على سبيل المثال من أجل $N=3$ ومن العلاقتين (8.45) و (8.46) نجد أن :

$$\hat{S} = \frac{1}{6} (\hat{P}_{123} + \hat{P}_{312} + \hat{P}_{231} + \hat{P}_{132} + \hat{P}_{321} + \hat{P}_{213}) \quad (8.63)$$

$$\hat{A} = \frac{1}{6} (\hat{P}_{123} + \hat{P}_{312} + \hat{P}_{231} - \hat{P}_{132} - \hat{P}_{321} - \hat{P}_{213}) \quad (8.64)$$

بجمع العلاقتين السابقتين نجد أن :

$$\hat{S} + \hat{A} = \frac{1}{3} (\hat{P}_{123} + \hat{P}_{312} + \hat{P}_{231}) \neq 1 \quad (8.65)$$

وهذا يعني أن فراغ حالات الجملة \mathcal{E} ليس مجموعاً مباشراً للفراغين الجزئيين منه :

الفراغ المتناظر \mathcal{E}_S والفراغ اللامتناظر \mathcal{E}_A .

نفرض أن الملحوظ الفيزيائي $\hat{\theta}_s(1, 2, \dots, N)$ متناظر تماماً بالنسبة لتبديل الأدلة $1, 2, \dots, N$ فانه يقبل التبادل مع أي مؤثر تبديل :

$$[\hat{\theta}_s(1, 2, 3, \dots, N), \hat{P}_A] = 0 \quad (8.66)$$

٦٣ - مسلمة التناظر :

نسلم أن مجموعة معينة فقط من أشعة فسراغ حالات جملة مكوّنة من مجموعة من الجسيمات المتطابقة يمكن أن تصف الحالات الفيزيائية للجملة ، وهذه الأشعة الفيزيائية إما أن تكون متناظرة أو لامتناظرة وذلك حسب طبيعة الجسيمات المتطابقة . نسمي الجسيمات الموصوفة بأشعة فيزيائية متناظرة : بوزونات ، وتلك الموصوفة بأشعة فيزيائية لامتناظرة : فيرميونات .

تنص اذن مسلمة التناظر على قصر فسراغ حالات جملة مكوّنة من مجموعة من الجسيمات المتطابقة على أحد الفراغات الجزئية \mathcal{E} أو \mathcal{E}' حسب طبيعة الجسيمات المكوّنة للجملة ، وليس على الفراغ الكلي المكوّن من الجداء التنسوري لفراغات الحالات الفردية .

تنقسم الجسيمات الموجودة ، في الطبيعة ، طبقاً لهذه المسلمة ، الى نوعين : فيرميونات وبوزونات ، وتحقق كل الجسيمات المعروفة حالياً القاعدة التجريبية التالية : ان جميع الجسيمات ذات السبين المساوي لنصف عدد صحيح هي فيرميونات (مثل الالكترونات ، البروتونات ، ...) وكل الجسيمات ذات السبين المساوي لعدد صحيح هي بوزونات (مثل الفوتونات ، الميزونات ، ...) .

في الحقيقة اذا كانت هذه القاعدة محققة من أجل جسيمات الأولية فانها أيضا محققة من أجل الجسيمات المكوّنة من الجسيمات الأولية . لنأخذ جملة مكوّنة من جسيمات مركبة من جسيمات أولية فان تبديل جسيمين مركبين يعود الى تبديل مكوّنات الجسيم الأول مع نظائرها من مكوّنات الجسيم الثاني . ان هذا التبديل لا يغير الشعاع الفيزيائي الذي يصف حالة الجملة اذا كانت الجسيمات الأولية المكوّنة للجسيمين المبدلين بوزونات أو اذا كانت فيرميونات عددها زوجي ويتغير هذا الشعاع في حالة كون الجسيمات الأولية المكوّنة للجسيمين المبدلين فيرميونات عددها فردي .

64 - إزالة انطباق التبديل :

لنفحص في البداية كيف يمكن أن نزيل المسألة الجديدة التي أدخلناها في الفقرة السابقة انطباق التبديل الذي ذكرناها فسي الفقرة (64)، حيث يمكننا أن نوجز النقاش الذي أجريناه بما يلي :
فغرض أن $\langle 1u \rangle$ شعاع رياضي يمكن أن يصف الحالة الفيزيائية لجملة مكونة من N جسيماً متطابقاً، أن $\hat{P}_u \langle 1u \rangle$ هو شعاع يمكن أن يصف الحالة الفيزيائية حيث \hat{P}_u مؤثر تبديل كفي . وكذلك جميع أشعة الفراغ الجزئي \mathcal{E}_u المولد من الشعاع $\langle 1u \rangle$ أو جميع تحويلاته بواسطة التبديل $\hat{P}_u \langle 1u \rangle$ تصف هذه الحالة الفيزيائية . أن بعد الفراغ الجزئي \mathcal{E}_u يمكن أن يأخذ جميع القيم من 1 إلى $N!$ حسب الشعاع $\langle 1u \rangle$. فإذا كان بعد الفراغ الجزئي \mathcal{E}_u أكبر من الواحد فإن هناك مجموعة من الأشعة الرياضية التي تصف الحالة الفيزيائية نفسها . لدينا إذن انطباق التبديل .

في الحقيقة أن المسألة الجديدة التي أدخلناها تحدد الأشعة الرياضية التي يمكن أن تصف الحالة الفيزيائية : فهي يجب أن تنتمي إما إلى \mathcal{E}_s من أجل البوزونات أو إلى \mathcal{E}_f من أجل الفيرميونات . وهكذا نستطيع أن نزيل انطباق التبديل إذا استطعنا أن نبرهن على أن \mathcal{E}_u يحتوي إما على شعاع واحد من \mathcal{E}_s أو على شعاع واحد من \mathcal{E}_f من أجل ذلك سنستعمل العلاقتين (1.49) و (8.50) المبرهنتين سابقاً حيث :

$$\hat{S} \langle 1u \rangle = \hat{S} \hat{P}_u \langle 1u \rangle \quad (9.67)$$

$$\hat{A} \langle 1u \rangle = \mathcal{E}_u \hat{A} \hat{P}_u \langle 1u \rangle \quad (9.68)$$

ان العلاقتين السابقتين تعطيان مسقط أشعة \mathcal{E}_u على \mathcal{E}_s أو على \mathcal{E}_f . وهكذا تحدد المسألة الشعاع الذي يمثل الحالة الفيزيائية :
فهو الشعاع $\hat{S} \langle 1u \rangle$ من أجل البوزونات والشعاع $\hat{A} \langle 1u \rangle$ من أجل الفيرميونات . نسمي الأشعة $\hat{S} \langle 1u \rangle$ و $\hat{A} \langle 1u \rangle$ بالأشعة الفيزيائية .

65 - قاعدة تشكيل الأشعة الفيزيائية :

اعتماداً على المناقشة التي أجريناه في الفقرة السابقة

نستطيع الوصول الى القاعدة التي يجب تطبيقها لايحاد الشعاع الفيزيائي الذي يصف حالة فيزيائية معينة لجملة مكونة من N جسيماً متطابقاً وهي ١ - نرقم الجسيمات بشكل كافي ومن ثم نشكل الشعاع $|u\rangle$ المقابل

للحالة الفيزيائية والموافقة للأرقام المعطاة للجسيمات .

٢ - نؤثر على الشعاع $|u\rangle$ أما بالمؤثر \hat{K} في حالة كسور الجسيمات عبارة عن بوزونات أو بالمؤثر \hat{A} في حالة كونها عبارة عن فيرميونات .

٣ - ننظم الشعاع الذي نحصل عليه .

٦٦ - تطبيق على الجمل المكوّنة من جسيمين متطابقين :

نفرض أنه لدينا جملة مكوّنة من جسيمين متطابقين وأسمه يمكننا وصف أحدهما بالشعاع المنظم $|v\rangle$ والآخر بالشعاع المنظم $|u\rangle$ ، ولنوجد الشعاع الفيزيائي الذي يصف حالة الجملة بتطبيق القاعدة السابقة .

١ - نرقم الجسيم الموجود في الحالة $|v\rangle$ بالرقم (١) وذاك الموجود في الحالة $|u\rangle$ بالرقم (٢) فيكون الشعاع $|u\rangle$ هو :

$$|u\rangle = |1: v, 2: u\rangle \quad (8.70)$$

٢ - نؤثر بالمؤثر \hat{K} في حالة كون الجسيمين عبارة عن بوزونين حيث أن \hat{K} معطى بالعلاقة (8.16a) فنجد :

$$\hat{K}|u\rangle = \frac{1}{2} [|1: v, 2: u\rangle + |1: u, 2: v\rangle] \quad (8.71)$$

أو نؤثر بالمؤثر \hat{A} في حالة كون الجسيمين عبارة عن فيرميونين حيث أن \hat{A} معطى بالعلاقة (8.16b) فنجد :

$$\hat{A}|u\rangle = \frac{1}{2} [|1: v, 2: u\rangle - |1: u, 2: v\rangle] \quad (8.72)$$

٣ - ننظم الأشعة الناتجة (8.71) و (8.72) وذلك بفرض أن الشعاعين $|v\rangle$ و $|u\rangle$ متعامدان باستبدال الثابت $1/2$ بالثابت $1/\sqrt{2}$

$$\text{فيصبح الشعاع الفيزيائي الذي يصف الحالة الفيزيائية للجملة :} \quad (8.73)$$

$$|v, u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1: v, 2: u\rangle + \epsilon |1: u, 2: v\rangle]$$

حيث $\epsilon = 1$ من أجل البوزونات و $\epsilon = -1$ من أجل الفيرميونات .

في الحالة التي تكون فيها الحالتان $14\rangle$ و $1x\rangle$ متطابقتين أي :

$$14\rangle = 1x\rangle \quad (8.74)$$

فان الشعاع $1u\rangle$ المعطى بالعلاقة (8.75) يصبح :

$$1u\rangle = 14:4\rangle + 214\rangle \quad (8.75)$$

ونلاحظ أن الشعاع (8.75) هو شعاع متناظر. وعندما يكون الجسيمان عبارة عن بوزونين فان $1u\rangle = 1u\rangle$ وبالتالي فان الشعاع $1u\rangle$ هو الشعاع الفيزيائي الذي يصف حالة جملة مكوّنة من بوزونين الحالة الفردية نفسها $14\rangle$. أما عندما يكون الجسيمان عبارة عن فيرميونين فنلاحظ :

$$A1u\rangle = \frac{1}{2} [14:4\rangle + 214\rangle - 11:4\rangle + 2:4\rangle] = 0 \quad (8.76)$$

في هذه الحالة لا يوجد أي شعاع لامتناظر ينتمي إلى \mathcal{A} يمكن أن يصف الحالة الفيزيائية لجملة مكوّنة من فيرميونين من نفس الحالة الفردية $14\rangle$ وهذا ينتج مباشرة من تطبيق مسلمة التناظر المذكورة في الفقرة (63). نستنتج من هذه الحالة الخاصة نتيجة هامة جداً تعرف تحت اسم " مبدأ الاستبعاد أو مبدأ باولي " وهي : لا يمكن لفيرميونين متطابقين أن يشغلا الحالة الكوانتية نفسها في الوقت نفسه.

67 - تعميم على جملة مكوّنة من N جسيم $(N \geq 2)$:

نعم النتائج السابقة على الجمل التي تحتوي على N جسيماً متطابقاً ولتوضيح ذلك سنعالج الحالة $N=3$.

نفرض أنه لدينا جملة مكوّنة من ثلاثة جسيمات متطابقة يمكن وصفها بالأشعة المنظمه والمتعامدة $14\rangle, 1x\rangle, 1u\rangle$ فيكون الشعاع $1u\rangle$ حسب الشرط (1) من القاعدة المعطاة في الفقرة (63) من الشكل :

$$1u\rangle = 14:4\rangle + 214\rangle + 3:4\rangle$$

نميز بين حالتين : الحالة الأولى وهي الحالة التي تكون فيها الجسيمات عبارة بوزونات والحالة الثانية وهي الحالة التي تكون فيها الجسيمات عبارة عن فيرميونات .

٢ - الحالة الأولى " بوزونات " :

نطبق الموتر \hat{S} على $|u\rangle$ حيث \hat{S} معطى بالعلاقة (٨.٦٣) فنجد :

$$|u\rangle = \frac{1}{6} [|1:4, 2:4, 3:w\rangle + |1:w, 2:4, 3:x\rangle + |1:x, 2:w, 3:4\rangle + |1:4, 2:w, 3:x\rangle + |1:x, 2:4, 3:w\rangle + |1:w, 2:x, 3:4\rangle] \quad (8.71)$$

وننظم هذه الحالة باستبدال الثابت $1/6$ بالثابت $1/3!$ فيصبح الشعاع الفيزيائي الذي يصف الحالة الفيزيائية للجملة :

$$|4, x, w\rangle = \frac{1}{3!} [|1:4, 2:x, 3:w\rangle + |1:w, 2:4, 3:x\rangle + |1:x, 2:w, 3:4\rangle + |1:4, 2:w, 3:x\rangle + |1:x, 2:4, 3:w\rangle + |1:w, 2:x, 3:4\rangle] \quad (8.72)$$

في الحالة التي يكون فيها $|4\rangle \equiv |x\rangle$ مع بقائهما معامدين لـ $|u\rangle$ فانه يظهر في الطرف الثاني من العلاقة (٨.٧٢) ثلاثة حدود مختلفة فقط وبالتالي يصبح الشعاع الفيزيائي الذي يصف الحالة الفيزيائية للجملة ، بعد تنظيمه :

$$|4, 4, w\rangle = \frac{1}{3!} [|1:4, 2:4, 3:w\rangle + |1:4, 2:w, 3:4\rangle + |1:w, 2:4, 3:4\rangle] \quad (8.73)$$

أما في الحالة التي يكون فيها $|4\rangle \equiv |x\rangle \equiv |w\rangle$ فان الشعاع :

$$|u\rangle = |1:4, 2:4, 3:4\rangle \quad (8.74)$$

هو الشعاع الفيزيائي الذي يصف الحالة الفيزيائية للجملة المكونة من ثلاث بوزونات يشغلون نفس الحالة الفردية $|4\rangle$.

ب - الحالة الثانية " فيرميونات " :

نطبق الموتر \hat{A} المعطى بالعلاقة (٨.٦٤) على الشعاع $|u\rangle$ المعطى

$$|u\rangle = \frac{1}{6} [|1:4, 2:x, 3:w\rangle + |1:w, 2:4, 3:x\rangle + |1:x, 2:w, 3:4\rangle - |1:4, 2:w, 3:x\rangle - |1:x, 2:4, 3:w\rangle - |1:w, 2:x, 3:4\rangle] \quad (8.75)$$

لاحظ أن إشارات الجمع والطرح في الطرف الثاني من العلاقة (8.82) تخضع للقواعد نفسها التي تخضع لها إشارات الجمع والطرح في معيّن 3×3 لذلك من المناسب أن نكتب $\hat{A}|u\rangle$ على شكل معين يسمى معيّن

سلا تر :

$$\hat{A}|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} |1:u\rangle & |2:u\rangle & |3:u\rangle \\ |1:v\rangle & |2:v\rangle & |3:v\rangle \\ |1:w\rangle & |2:w\rangle & |3:w\rangle \end{vmatrix} \quad (8.83)$$

ونلاحظ أن $\hat{A}|u\rangle$ إذا انطبقت حالتان أو أكثر من الحالات الثلاث $|u\rangle$ و $|v\rangle$ و $|w\rangle$ لتساوي عمودين من أعمدة المعين (8.83) بذلك نجد مرة أخرى مبدأ الاستبعاد "أو مبدأ باولي" : لا يمكن لمجموعة من الفيرميونات المتطابقة أن تشغل الحالة الكوانتية نفسها في الوقت نفسه . ننظم الحالة المعطاة ب (8.82) أو ب (8.83) باستبدال الثابت $1/3!$ بالثابت $1/\sqrt{3!}$ فيصبح الشعاع الفيزيائي الذي يصف الحالة الفيزيائية لجملة مكوّنة من ثلاث فيرميونات متطابقة :

$$|u, v, w\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \mathcal{D} [|1:u\rangle, |2:v\rangle, |3:w\rangle] \quad (8.84)$$

تعمم النتائج التي حصلنا عليها في آ و ب من أجل جملة مكوّنة من N جسيماً متطابقاً فنجد أنه يمكننا دوماً إيجاد الشعاع الفيزيائي المتناظر $\hat{S}|u\rangle$ الذي يصف الحالة الفيزيائية لـ N بوزونات اعتباراً من الحالات الفردية $|u\rangle, |v\rangle, \dots$ ويمكننا دوماً إيجاد الشعاع الفيزيائي اللامتناظر $\hat{A}|u\rangle$ الذي يصف الحالة الفيزيائية لـ N فيرميوناً على شكل معين سلا تر $N \times N$ بشرط أن تكون جميع الحالات الفردية مختلفة بعضها عن بعض . هذا يوضح كيف يمكن أن تكون نتائج تطبيق المسألة الجديدة عندما تكون الجمل مكوّنة من فيرميونات أو من بوزونات .

68 - الفروق بين البوزونات والفيرميونات :

يظهر من مسألة التناظر أن الفرق بين البوزونات والفيرميونات تافه جداً، ولكن في الحقيقة أن لاختلاف الإشارة في الشعاع الفيزيائي

نتائج هامة جداً. في الواقع أن مسلمة التناظر لا تضع أية شروط
على الحالات الفردية للبوزونات المتطابقة بينما تفرض على الفيرميونات
الخضوع لمبدأ الاستبعاد لباولي : لا يمكن لفيرميونين متطابقين
أن يشغلا الحالة الكوانتية نفسها في الوقت نفسه .

من الجدير بالذكر أن مبدأ باولي قد وضع لايضاح خواص الدرات
التي تحتوي على الكترونات متعددة ولكنه الآن يبدو كمنسجة مباشرة
لمسلمة التناظر، وهو ينطبق على جميع الفيرميونات المتطابقة
وليس فقط على الالكترونات .

٦٥ - سوية الطاقة الدنيا لجملة مكوّنة من جسيمات متطابقة مستقلة
بعضها عن بعض :

ان هاملتوني جملة مكوّنة من جسيمات متطابقة " بوزونات
أفيرميونات " متناظر لتبديلات الجسيمات :

$$[\hat{H}, \hat{P}_i] = 0 \quad (8.65)$$

حيث \hat{P}_i مؤثر تبديل كفي .

لنفرض أنه لدينا جملة مكوّنة من جسيمات متطابقة مستقلة
بعضها عن بعض ، هذا يعني أنه لا يوجد تأثير متبادل بينها فيكون
هاملتوني الجملة عبارة عن مجموع الهاملتونيات التي تخص كل جسيم
على حده :

$$\hat{H}(1,2,\dots,N) = \hat{h}(1) + \hat{h}(2) + \dots + \hat{h}(N) \quad (8.66)$$

حيث $\hat{h}(i)$ تابع فقط للملاحظات الفيزيائية التي تتعلق بالجسيم (i) ،
وبما أن الجسيمات متطابقة فان لجميع الحدود في العلاقة (8.66)
الشكل نفسه اذن لمعرفة القيم الخاصة والأشعة الخاصة للهاملتوني
الكل $\hat{H}(1,2,\dots,N)$ يكفي أن نحسب القيم الخاصة والأشعة الخاصة
لهاملتوني أحد الجسيمات $\hat{h}(i)$ في فراغ حالات $\psi(i)$ ولتكن:

$$\hat{h}(j) |\psi_n\rangle = e_n |\psi_n\rangle \quad ; \quad |\psi_n\rangle \in \mathcal{E}(j) \quad (8.87)$$

حيث فرضنا أن طيف $\hat{h}(j)$ متقطع وغير منطبق .
 في الحالة التي تكون فيها الجملة مكوّنة من بوزونات متطابقة
 فإن الأشعة الخاصة للهاملتوني $\hat{H}(1,2,\dots,N)$ هي الأشعة الناتجة عن
 الجداءات التنسورية لـ N شعاعاً $|\psi_n\rangle$ كيفياً بعد تطبيق المؤثر \hat{E}
 عليها :

$$|\psi_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{(S)}\rangle = c \sum_n \hat{P}_n |1: \psi_{n_1}, 2: \psi_{n_2}, \dots, N: \psi_{n_N}\rangle \quad (8.88)$$

وتكون الطاقة المقابلة هي مجموع N طاقة فردية :

$$E_{n_1, n_2, \dots, n_N} = e_{n_1} + e_{n_2} + \dots + e_{n_N} \quad (8.89)$$

بشكل خاص إذا كانت e_j القيمة الخاصة الأصغر للمؤثر $\hat{h}(j)$
 المقابلة للشعاع الخاص $|\psi_j\rangle$ فإن الحالة الخاصة التي تمثل الحالة الدنيا
 للجملة هي عندما يكون الـ N بوزون في الحالة نفسها $|\psi_1\rangle$:

$$|\psi_{1,1,\dots,1}^{(S)}\rangle = |1: \psi_1, 2: \psi_1, \dots, N: \psi_1\rangle \quad (8.90)$$

التي تقابل القيمة الخاصة :

$$E_{1,1,\dots,1} = N e_1 \quad (8.91)$$

أما الحالة التي تكون فيها الجملة مكوّنة من فيرميونات
 متطابقة، فإنه، وحسب مبدأ باولي من المستحيل أن تشغل هذه
 الفيرميونات جميعا الحالة نفسها $|\psi_1\rangle$ في الوقت نفسه . لايجاد
 الحالة الدنيا للجملة نفرض أننا نستطيع ترتيب الطاقات e_n بشكل
 متزايد :

$$e_1 < e_2 < \dots < e_{n-1} < e_n < e_{n+1} < \dots \quad (8.92)$$

بذلك تكون طاقة الجملة في حالتها الدنيا هي :

(8.93)

$$E_{1,2,\dots,N} = e_1 + e_2 + \dots + e_N$$

تقابل هذه الطاقة الدنيا الحالة الدنيا المعطاة بالشعاع العيزيائي:

$$|\psi_{1,2,\dots,N}^{(A)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} |1:\psi_1\rangle & |1:\psi_2\rangle & \dots & |1:\psi_N\rangle \\ |2:\psi_1\rangle & |2:\psi_2\rangle & \dots & |2:\psi_N\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |N:\psi_1\rangle & |N:\psi_2\rangle & \dots & |N:\psi_N\rangle \end{vmatrix} \quad (8.94)$$

نسمي e_N الطاقة الفردية الأعلى المحققة في الحالة الدنيا بطاقة فيرمي للجملة .

من الجدير بالاشارة أننا قد فرضنا أن سويات الطاقة e_n غير منطبقة ولكنها في الحالة العامة يمكن أن تكون منطبقة لذلك فهي تدخل في المجموع (8.93) عدداً من المرات يساوي درجة انطباقها . في النهاية ان مبدأ باولي يلعب دوراً أساسياً في مجالات الفيزياء التي تدرس جملاً مكوّنة من عدد من الالكترونات مثل الفيزياء الذرية والفيزياء الجزئية وفيزياء الجسم الصلب وفي الجمل المكوّنة من عدد من البروتونات والنترونات كما في الفيزياء النووية .

70 - الاحصاء الكوانتي :

ان هدف الميكانيك الاحصائي هو دراسة الجمل المكوّنة من عدد كبير من الجسيمات وبما أننا لانعرف الحالة المجهرية للجملة فاننا نكتفي بوصفها بشكل كلي من خلال بعض صفاتها الجهرية (الضغط ، درجة الحرارة ، الكثافة ، ...) ، ولكن يجب أن نتذكر أن حالة جهرية معينة تقابل في الحقيقة جملة من الحالات المجهرية ، لذلك كان من الضروري تعيين عدد الحالات المجهرية المختلفة ذات الصفات المحددة عند دراسة خاصة جهرية للجملة .

ميكانيك الكم ٢ - ١٧

ان الميكانيك الاحصائي الكلاسيكي (احصاء ماكسويل - بولتزمان) يعالج الجسيمات المكوّنة لجملة ما على أنها مختلفة بعضها عن بعض حتى ولو كانت متطابقة وتعين الحالة المجهرية بالمعطيات التي تحدد الحالات الفردية للجسيمات المكوّنة للجملة وحيث تعتبر حالتين مجهريتين مختلفتين اذا اختلفتا عند تبديل الجسيمات ، على الرغم من أن المعطيات التي تحدد الحالات الفردية للجسيمات المكوّنة للجملة نفسها .

أما في الميكانيك الاحصائي الكوانتي فيجب الأخذ بعين الاعتبار مسألة التناظر . وتوصف الحالة المجهرية لجملة جسيمات متطابقة باحصاء N حالة فردية التي تشكلها ، ان احصاء الحالات المجهرية في الميكانيك الاحصائي الكوانتي لن يعطي النتيجة التي يعطيها الميكانيك الاحصائي الكلاسيكي . بالاضافة الى ذلك فان مبدأ باولي يميز بشكل جذري بين الجمل المكوّنة من بوزونات متطابقة وتلك المكوّنة من فرميونات متطابقة : يمكن لعدد كافي من البوزونات أن يشغل حالة كوانتية واحدة في الوقت نفسه بينما لا يشغل حالة كوانتية معينة في الوقت نفسه الا فيرميون واحد . لذلك ندرس البوزونات بواسطة احصاء بوز-انشتاين وندرس الفيرميونات بواسطة احصاء فيرمي - ديراك . لتوضيح أهمية مسألة التناظر والاحصاءات المستعملة سنورد بعض الأمثلة :

71 - الآزوت 14 والنوترون :

كان البروتون والالكترون الجسيمين الأولين الوحيدين المعروفين حتى عام 1930 ، وقد تخيل العلماء وحلموا أيضاً بأنهما سيكفيان لتكوين جميع الجمل المركبة ، وهكذا فقد اعتبروا أن نوى الذرات مكوّنة من بروتونات والكترونات ، وكان نموذج النواة على الشكل التالي : بفرض أن لنواة ما عدد كتلي A وعدد ذري Z فانها تحتوي على A بروتوناً لتعطيها الوزن و $(A - Z)$ الكترونات لاعطائها

الشحنة
 A نواة = A بروتون + $(A-Z)$ إلكترون = $(24-Z)$ فيرميون
 فيكون الاحصاء الذي تخضع له نواة معينة تابعاً لارتداجية العدد الكلي من الفيرميونات المكوّنة لها وحسب النموذج المذكور أعلاه فإن عددها هو $(24-Z)$ وبالتالي فإنها تتعلق بكون العدد Z فردياً أم زوجياً، فإذا كان Z فردياً فإن النواة عبارة عن فيرميون وإذا كان زوجياً فهي بوزون . استناداً إلى ذلك فإن نواة الآزوت $^{14}_7N$ يجب أن تكون فيرميوناً . ولكن طيف الجزيئة N_2 أظهر أن هذه السواة هي بوزون وليست فيرميون ، وبالتالي يجب أن تحتوي على عدد زوجي من الفيرميونات كان ذلك السبب الرئيسي في رفض الفرضية السابقة بكون الإلكترونات موجودة داخل النواة واستبدلت بالبوزونات .
 من المعلوم أن :

$$A \text{ نواة} = Z \text{ بروتون} + (A-Z) \text{ نوترون} = A \text{ فيرميون}$$

بذلك يكون الاحصاء المرتبط بالنوى متعلقاً فقط بكون الرقم الكلي A زوجياً أو فردياً . في نواة الآزوت $A=14$ رقم زوجي إذن فهي بوزون وليست فيرميوناً .

٦٢ - الكواركات :

نعتبر اليوم أن الجسيمات مكوّنة من تركيب جسيمات أولية هي الكواركات فمثلاً ان الباريونات (بروتون ، نوترون ، ...) هي عبارة عن فيرميونات يجب أن تشكل من عدد فردي من الفيرميونات لذلك فهي مكوّنة من اجتماع ثلاث كواركات ، بينما الميزونات مكوّنة من اجتماع كوارك مع ضد كوارك وبالتالي فهي بوزونات .
 وهكذا فإن مبدأ باولي ينطبق على الجسيمات الأولية . ولكن لتفسير استقرار الهادرونات وجب تكوينها من مجموعة من الكواركات بحيث أن مبدأ باولي غير مطبق ، وللخروج من هذا المأزق فقد فرض أن الكواركات ملونة ولها ثلاثة ألوان مختلفة وفقط الكواركات المختلفة الألوان يمكن لها أن تجتمع لتشكل هادرونات معينة . إذن بمان الكواركات مختلفة

لاختلافها باللون فإن مبدأ باولي لم ينتهك وبالتالي فقد لعب مفهوم الفيرميون دوراً هاماً في بناء نظرية الكروموديناميكا الكوانتية أو ما تسمى بنظرية الحقول الكوانتية للكواركات الملونة، التي هي الآن النظرية الأساسية للتفاعلات النووية القوية .

73 - فرط السيولة والسائل الكوانتي :

يوجد نوعان من النظائر لنوى الهيليوم : الهيليوم - 3 أو ^3He (2 بروتون + 1 نوترون) والهيليوم - 4 أو ^4He (2 بروتون + 2 نوترون) . نلاحظ أن الأول عبارة عن فيرميون ($A=3$) بينما الثاني عبارة عن بوزون ($A=4$) .

تعتبر المقارنة بين السائل ^3He والسائل ^4He ، في درجات الحرارة المنخفضة ($2^\circ\text{K} \leq T$) ، أوضح مثال على الفرق بين الفيرميونات والبوزونات ، ويجب الملاحظة هنا أن خواصهما الذرية متطابقة تماماً وذلك لأن عدد الإلكترونات في كل منهما متساو (2 إلكترون) . ولكن نجد أن السائل ^4He ليس له أية لزوجة فيبدأ بالخروج من الوعاء دون أي مشكلة وهذا يرجع إلى كونه بوزوناً ففي هذه الدرجة المنخفضة من الحرارة تسعى جميع النوى للوجود في الحالة الدنيا التي تمتلك سوية الطاقة الدنيا ، نسمي هذه الظاهرة بتكثف بوز-اينشتاين، وتتحرك مجتمعة بحيث أنها لا تفقد طاقتها كما تفقد السوائل العادية عند احتكاك ذراتها مع جدران الوعاء . تشكل هذه الظاهرة في الحقيقة انتقالاً فعلياً في الطور " طور فرط السيولة " . بينما لا نجد مثل هذا الطور في الهيليوم 3 ولا يمكن تفسير هذه الظاهرة إلا بالاعتماد على كون ^4He بوزوناً و ^3He فيرميوناً .

من الجدير بالذكر أن ظاهرة " السوائل " البوزونية تظهر خواصاً تشبه فرط السيولة ، وهي حالة الإلكترونات الناقلة في بعض المعادن البلورية حيث يرتبط بعضها ببعض مشن مشن مشكلة ما يسمى (أزواج كوبر) . يمكن اعتبار هذه الأزواج من الإلكترونات

بمشابة بوزونات وبالتالي فان فرط سيولتها يعطي للمعدن خاصية
فرط الناقلية : ان مقاومة المعدن تنعدم تحت درجة حرارة حرجه كما
تنعدم لزوجة السائل الكونتي . ان از واج كوبر تفسر أيضا ظاهرة
فرط الناقلية الشاردية ولكن الأزواج مكوّنة هنا من شوارد .

٦٤- متراجحة هايزنبرغ - باولي :

وجدنا سابقاً أن مفهوم الحالة مختلف كلياً في الميكانيك
الكوانتي عنه في الميكانيك الكلاسيكي . حيث أن حالة جسيم تعين
تماماً بمعرفة موضعه ودفعه في الميكانيك الكلاسيكي ويمكن تمثيلها
بدقة في فراغ الأطوار . أما من الناحية الكوانتية وحسب متراجحة
هايزنبرغ :

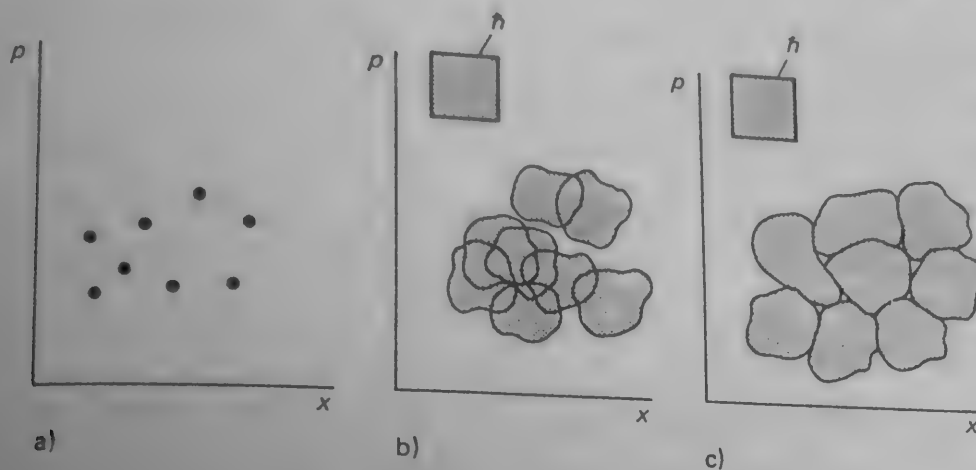
$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar \quad (8.92)$$

فان حالة الجسيم تمثل بمنطقة من فراغ الأطوار مساحتها هي على
الأقل من مرتبة كبر \hbar ، يمكن تعميم النتيجة السابقة على ثلاثة
أبعاد حيث أن متراجحة هايزنبرغ تكتب بالشكل :

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_x \cdot \Delta x &\geq \hbar \\ \Delta p_y \cdot \Delta y &\geq \hbar \\ \Delta p_z \cdot \Delta z &\geq \hbar \end{aligned} \right\} \quad (8.93)$$

أي أنه يجب أن تمثل حالة الجسيم في فراغ الأطوار ذي الأبعاد
الستة بخلية من قياس \hbar^3 .
بفرض الآن أننا ندرس جملة مكوّنة من N جسيماً. تمثل حالة
الجملة ، من الناحية الكلاسيكية ، بتوزع معين لـ N نقطة من فراغ
الأطوار . أما من الناحية الكوانتية فتمثل حالتها بـ N منطقة في
فراغ الأطوار قياس كل واحدة منها من قياس \hbar^3 على بعد واحد) ومن
قياس \hbar^3 (على ثلاثة أبعاد) ، الشكل (٨.٣) ، وتعتمد خواص
الجملة على الحجم الكلي لهذه المناطق . اذا كونت الجملة منطقة
أبعادها هي Δp و Δq على محاور الموضع والدفع على الترتيب فان
هذه الأبعاد هي الأبعاد التي تصف القياسات على محوري الموضع والدفع ،

فإذا كانت الجملة مكونة من N فيرميوناً متطابقاً فإن حالتها تمثل في فراغ الطور حسب مبدأ باولي من اجتماع N منطقة مختلفة ويكون الحجم الكلي لهذه المنطقة من مرتبة $N h^3$. ترتبط هذه القيمة مع الأبعاد التي تصف القياسات على محوري الموضع والدفع بالعلاقة :



شكل (8.3) فضاء الحالات

- (a) تمثل حالة جملة مكونة من N جسيماً، من الناحية الكلاسيكية، بشكل معين لـ N نقطة منه .
 (b) تمثل حالة جملة مكونة من N جسيماً، من الناحية الكوانتية، بـ N منطقة من قياس h ،
 وذلك حسب متراجعة هايزنبرغ ،ويمكن للمناطق ان تتقاطع .
 (c) تمثل حالة جملة مكونة، من N فيرميون متطابق، من اجتماع N منطقة مختلفة حسب مبدأ باولي .

(8.97)

$$(\Delta p)^3 (\Delta x)^3 \approx N h^3$$

أو أيضاً :

(8.98)

$$\Delta p \cdot \Delta x \approx N^{1/3} h$$

نسمي العلاقة (8.98) متراجعة هايزنبرغ - باولي .

بمقارنة هذه العلاقة مع مترابطة هايزنبرغ العادية التالية :
(8.99)

نجد أنه يمكننا استبدال الطرف الثاني من العلاقة (8.98) بناسب بلانك فيرميوني فعال من الشكل :

$$h_f(N) = N^{1/2} h$$

(8.100)

نلاحظ من هذه العلاقة أنه بزيادة N فإن $h_f(N)$ تزداد. نستطيع القول إذن أن لاتناظر التابع الموجي الفيرميوني يضم الطواهر الكوانتية ، التي توضحها مترابطة هايزنبرغ ، بشكل كبير عندما يكون عدد الفيرميونات المتطابقة N كبيراً.

75- الذرات :

سندرس الآن أثر مبدأ باولي على المواد العادية ونعتمد بالمواد العادية المواد الموجودة في الطبيعة من حولنا حيث نعتبر أن القوى الكولونية هي القوى الوحيدة التي تتحكم فيها في حالتها الدنيا. لتكن لدينا ذرة عددها الذري Z أي أنها تحتوي على Z الكترونات. بفرض أن الالكتران ليس فيرميوناً هذا يعني أن الحالة الدنيا للذرة التي تحتوي على Z الكترونات تحسب من كمية حركتها وموضعها آخذين بعين الاعتبار مترابطة هايزنبرغ فمن أجل نواة شحنتها $+Ze$ حيث e شحنة الالكتران ، فإن لكل الكترون طاقة دنيا من مرتبة $E_H = -Z^2$ وذلك باهمال التفاعل بين الالكترونات حيث

$$E_H = \frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 = \frac{m e^4}{2\hbar^2}$$

سوية الطاقة الدنيا لذرة الهيدروجين ،
بذلك تكون طاقة الذرة من مرتبة :

$$E_Z \approx -Z^2 E_H$$

(8.101)

ويكون نصف قطرها الموافق لهذه الطاقة :

$$r_Z \approx Z^{-1} a_0$$

حيث $a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}$ نصف قطر مدار بور لذرة الهيدروجين . بما أن

ادخال التفاعل المتبادل بين الالكترونات لن يغير في تابعية r_e ، فان حجم الذرة سينقص بزيادة عددها الذري Z ، وهكذا فان حجم ذرة اليورانيوم يجب أن يكون أصغر بمئة مرة تقريبا من ذرة الهيدروجين .

لكن التجربة تثبت أن حجم الذرات كلها من مرتبة الأنفستروم ($1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$) . لازالة هذا التناقض نوضح هنا أننا استعملنا متراجعة هايزنبرغ للحصول على الطاقة وبما أن الالكترونات عبارة عن فيرميونات فيجب أن نطبق متراجعة هايزنبرغ - باولسي (8.98)، اذن يجب أن نبدل \hbar بـ \hbar_f التالية :

$$\hbar_f(Z) = Z^{1/3} \hbar \quad (8.103)$$

بتبديل العلاقة (8.103) في العلاقتين (8.101) و (8.102) نجد :

$$E_Z^f \approx -Z^{2/3} E_H \quad (8.104)$$

$$r_Z^f \approx Z^{-1/3} a_0 \quad (8.105)$$

في الحقيقة أن البنية الذرية أكثر تعقيداً مما ذكرنا سابقاً . بفرض أن الذرة تحتوي على الكترون واحد فان أنصاف أقطار السويات المشارة لهذه الذرة تزداد بشكل دائم . في هذه الشروط فان التفاعل المتبادل بين الالكترونات الذي أهملناها حتى الآن سيلعب دوراً كبيراً بفرض أننا استعملنا Z حالة مختلفة من أجل بناء الحالة المشتركة، بذلك يجب إل ($Z-1$) الكترونات داخلياً شحنة النواة وهي $Z e$ عن الالكترون الموجود في الحالة الأخيرة فكما لو أن هذا الالكترون يتأثر بشحنة فعالة للنواة هي $e = (Z-1)e - Z e$ ، بذلك تقارن حالته بالحالة الدنيا لذرة الهيدروجين . هكذا كما تعتبر الكيمياء أن حجم الذره هو آخر منطقة يمكن أن نجد فيها الكترونات وهذا الحجم هو بشكل أساسي حجم ذرة الهيدروجين نفسه . تظهر العلاقة (8.105) أن توزع الشحنات الالكترونية غير متجانس وانه يكون مُركّزاً أكثر

زيادة \propto . ولكن المنطقة الخارجية لهذا التوزيع تظل من الشكل الهيدروجيني الأمر الذي يوضح ثبات حجم الذرات وثبات طاقة الشرد، أي الطاقة اللازمة لاقتلاع الكترونا من الذرة، فهي دوماً من مرساة بضعه الكترونات فولط .

٦٤ - المادة الجهرية :

ان بعض خواص المواد الجهرية لا تعتمد على كميتها أو بكلمة أخرى على عدد الجسيمات المكونة لها. فمثلاً يتبخّر الماء عند ضغط معين عند درجة الحرارة نفسها، مهما كانت كميتها. أما كثافة الحديد 1 كغ منه أو لطن منه فهي نفسها تحت الظروف نفسها. غير أن هناك مجموعة من الخواص التي تعتمد على عدد الجسيمات المكونة للمادة مثل الحجم وطاقة الارتباط . في الحقيقة ان خواص المادة تبقى متجانسة لأن طاقة الارتباط $E_0(N)$ في جملة مكونة من N ذرة تزداد بشكل خطي مع زيادة عدد ذراتها . هذا يعني أنه يجب أن يكون لدينا :

$$E_0(N) \propto N \quad (7.106)$$

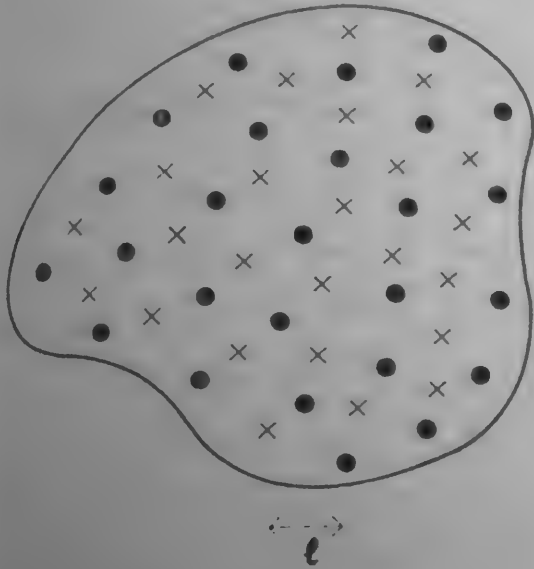
ولكن طاقة ارتباط الجسيم ϵ مستقلة عن العدد N إذن :

$$\epsilon(N) = \frac{1}{N} |E_0(N)| \propto \text{const.} \quad (7.107)$$

نلاحظ أن هذا الشرط محقق من أجل المواد العادية إذ أننا نحتاج لبضعه الكترونات فولط لاقتلاع ذرة من قطعة ثلج أو من جبل جليد. فنقول أن القوى الكولونية في حالة اشباع . ولمحاولة فهم حالة الاشباع هذه نفرض أنه لدينا جملة متعادلة كهربائياً مكونة من N جسيماً موجباً شحنة كل منها $+e$ و N جسيماً سالباً شحنة كل منها $-e$ (بروتون و N إلكترون على سبيل المثال) . ان الطاقة الكامنة للجملة تنتج من التعادل بين قوى التنافر وقوى التجاذب الكولونية. بذلك فإن كل جسيم يحاول أن يتعادل مع الجسيمات التي تخالفه الشحنة وتحجبه عن الشحن الأخرى المماثلة. تكون الطاقة

الكامنة للجملة اذن هي طاقة N جسيما يتفاعل كل منها مع شحنة فعالة تخالفه بالشحنة وتبعد عنه مسافة l الذي هو متوسط البعد بين جسيمين متجاورين الشكل (4.8) :

$$U = -N \frac{e^2}{l} \quad (7.108)$$



شكل (8.4)

جملة كولونية

N شحنة موجبة (+) و N شحنة سالبة (x) تشغل حجما قياسه L ان متوسط البعد بين جسيمين متجاورين هو l وهو مرتبة قياس الحجم الذي يشغله جسيماً واحداً .

من الناحية الكلاسيكية ان العلاقة (8.108) لا تشير مشكلة حالة الاشباع ولا حتى استقرار الجملة حيث أننا نجد أنه من أجل $l \rightarrow 0$ فان $U \rightarrow -\infty$ أي أنه لا يوجد طاقة دنيا .

لندرس الجملة اذن من الناحية الكوانتية فنجد أن الطاقة الحركية لها :

$$E_{kin} = N \frac{\bar{p}^2}{2M} + N \frac{\bar{p}^2}{2m}$$

حيث أن m و \bar{p} كتلة ودفع الجسيم السالب الوسطى مثلاً و M و \bar{p} كتلة ودفع الجسيم الموجب الوسطى ، ولكن لدينا $M \gg m$ لذلك نهمل الطاقة الحركية للجسيم الموجب وتصبح الطاقة الكلية للجملة :

(8.110)

$$E = N \frac{\bar{p}^2}{2m} - N \frac{e^2}{l}$$

تظهر العلاقة الأخيرة أن E خطية مع N . بفرض أن كل جسيم من الجملة يستطيع أن يغير بوضعه بمقدار L هذا يعني استناداً للمراجعة

هايزنبرغ :

(8.111)

ولكن ℓ تمثل متوسط البعد بين جسيمين متجاورين هذا يعني أن حجم الجملة الكلي يعطى بالعلاقة :

(8.112)

$$L^3 = N \ell^3$$

أو بشكل آخر :

(8.113)

$$\ell = N^{-1/3} L$$

بذلك يمكننا أن نحسب (8.110) بدلالة L كما في الشكل :

(8.114)

$$E \gg N \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{L^2} = N^{4/3} \frac{e^2}{L}$$

ان هذه الطاقة لها قيمة دنيا هي :

(8.115)

$$E_0(N) \approx - N^{5/3} E_H$$

من أجل قيمة L التالية :

(8.116)

$$L \approx N^{1/3} a_0$$

نلاحظ أن الجملة مستقرة لوجود طاقة دنيا ولكن بدون حالة اشباع حيث نجد أن كثافة الجملة :

(8.117)

$$\rho = \frac{N}{L^3} \approx N^{2/3} a_0^{-3}$$

تزداد بشكل سريع مع زيادة N مثلها مثل طاقة ارتباط الجسيم :

(8.118)

$$\epsilon = \frac{|E_0(N)|}{N} \approx N^{2/3} E_H$$

لاظهار جسامة الخطأ في النتائج لنفرض أن الجملة عبارة عن غرام واحد من الهيدروجين هذا يعني أن هذه الجملة تشغل حجماً قياسه 10^{-8} cm^3 حسب العلاقة (8.116) واننا نحتاج الى طاقة $E_H = 10^{-2} \text{ eV}$ لاقتلاع ذرة واحدة حسب

العلاقة (8.118) . ان الخطأ الذي حصلنا عليه سببه أننا استعملنا متراجدة هايزنبرغ وبما أن الالكترونات عبارة عن فيرميونات يجب أن نستعمل متراجدة هايزنبرغ - باولي أي أنه يجب أن نستبدل \hbar بـ $\hbar_f = N^{1/3} \hbar$ الأمر الذي يعطينا بأن بعد الجملة :

$$L_f \approx N^{1/3} a_0 \quad (8.119)$$

وكشافتها :

$$P_f \approx a_0^{-3} \quad (8.120)$$

وطاقتها الدنيا :

$$E_f(N) \approx -N E_H \quad (8.121)$$

وطاقة ارتباط الجسيم :

$$\epsilon \approx E_H \quad (8.122)$$

ان العلاقة الأخيرة تظهر أن هناك حالة اشباع والعلاقة (8.120) تبين أن كثافة المادة لاتتعلق بعدد الجسيمات المكوّنة لها . يجب أن نشير هنا أن هذه النتائج تتعلق بالخواص الفيرميونية لنوع واحد من الجسيمات المشحونة فقط . وان الطاقة الحركية للالكترونات تكفي لموازنة طاقة التجاذب الكولونية الفعّالة . ان هذه النتائج تتوافق مع النتائج التجريبية مهما كان الاحصاء الذي تخضع له النوى ، حتى ولو أن بعض خواص المادة يتعلق باحصاء النوى (مقارنة ^3He و ^4He) فان وجود المادة نفسها وخواصها النوعية (كثافة ، طاقة ارتباط ...) لاتتعلق به .

من الجدير بالذكر أن مشكلة الاشباع الكوانتي للقوى الكولونية اكتشفت وأوجد حلها حيث بواسطة ديسون ولينارد (Dyson et Lenard) عام (1965) . حيث أن النظرية الكوانتية هي التي أوضحت هذه المسألة .

٦٦ - الكواكب والأقمار والأقزام البيضاء :

إذا جعلنا عدد عناصر الجملة N يزداد فسنصل الى مرحلة تصبح

فيها قوى الجاذبية هي القوى ذات الأثر الأكبر . بالرغم من أن قوى الجاذبية أصغر بكثير من القوى الكولونية على المستوى الفردي بين الجسيمات إلا أنها تصبح ذات مفعول أكبر بازدياد عدد عناصر الجملة وذلك لأنها لا تحتوي على قوى تنافر ولأن ظاهرة الحب غير موحودة فيها. لنفرض أنه لدينا جملة تحتوي على N ذرة كتلة كل منها M وتتميز بالبعد L أن قوى الجاذبية تتناسب مع عدد الأزواج التي يتفاعل بعضها مع بعض أي أنها تتناسب مع $N(N-1)/2 \approx N^2/2$ (حيث $N \gg 1$) . بذلك يمكن كتابة الطاقة الجاذبية الكامنة للجملة على الشكل :

$$U_{grav} \approx - N^2 \frac{GM^2}{L} \quad (8.123)$$

حيث $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ ثابت نيوتن . بمقارنة العلاقة (8.123) مع الطاقة الكولونية الكامنة آخذين بعين الاعتبار ظاهرة الحب (8.114) :

$$U_e \approx - N^{4/3} \frac{e^2}{L} \quad (8.124)$$

نلاحظ أن U_{grav} مهمة أمام U_e عندما تكون N صغيرة ، وتصبح من نفس مرتبة الكبير عندما نأخذ القيمة الانتقالية :

$$N_t \approx \left(\frac{e^2}{GM^2} \right)^{3/2} \quad (8.125)$$

أما في الحالة التي تكون فيها $N > N_t$ فإن قوى الجاذبية تكون مسيطرة وتكون الجملة في حالتها الدنيا عندما تكون طاقتها الكلية أصغرية ، لتسكن E طاقة الجملة الكلية حيث :

$$E \approx N^{5/3} \frac{e^2}{2mL} - N^2 \frac{GM^2}{L} \quad (8.126)$$

حيث أن الطاقة الحركية هي طاقة الإلكترونات الموجودة في الجملة والتي درسناها كفيرميونات . نحصل على الطاقة الدنيا من أجل :

$$L \approx N^{-1/3} \frac{e^2}{GM^2 m} \quad (8.127)$$

نلاحظ أن أبعاد الجملة تنقص بزيادة كتلتها $M_0 = NM$ وهذا واضح

من (8.113) لأن طاقة الجاذبية تزداد بسرعة أكبر زيادة الطاقة الحركية عندما تزداد N . وهكذا فإن أبعاد الجملة يجب أن تأخذ قيمة عظمى من أجل $N \approx N_t$. يمكننا تقدير هذه الأبعاد عندما تكون طاقة الجاذبية من نفس مرتبة كبر الطاقة الكولونية من العلاقتين (8.114) و (8.117) :

$$L_t \approx \left(\frac{e^2}{GM^2} \right)^{1/2} \frac{\hbar^2}{me^2} \quad (8.118)$$

توافق هذه الأبعاد الكتلة $M_t = M_0$:

$$M_t \approx \left(\frac{e^2}{GM^2} \right)^{3/2} M \quad (8.119)$$

لنحسب هذه المقادير عندما تكون الجملة مكونة من مادة خفيفة، الهيدروجين مثلاً ($M = m_p = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$)، أو من مادة ثقيلة، الحديد مثلاً ($M \approx 60 m_p$) فنجد من أجل المادة الخفيفة :

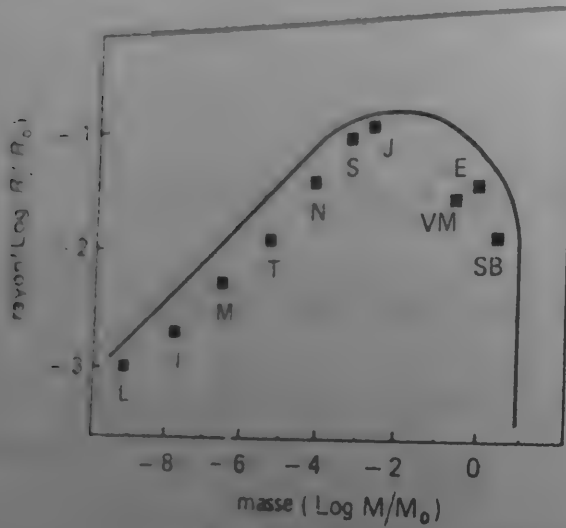
$$N_t = 1.4 \times 10^{54}, \quad L_t = 5.9 \times 10^4 \text{ km}, \quad M_t = 1.7 \times 10^{27} \text{ kg}$$

أما من أجل المادة الثقيلة فنجد :

$$N_t = 6.5 \times 10^{48}, \quad L_t = 9.8 \times 10^2 \text{ km}, \quad M_t = 1.1 \times 10^{22} \text{ kg}$$

نلاحظ أن هذه المقادير تمثل أبعاد الأجسام الكونية، وهكذا نجد أن الكواكب والأقمار تتبع النتائج التي حصلنا عليها الشكل (5.8) من الجدير بالذكر أن النجوم لاتخضع للنتائج نفسها حيث أن نصف قطر الشمس ($L_t \gg R_\odot \approx 0.7 \times 10^6 \text{ km}$) وذلك لأننا درسنا الجمل في حالتها الدنيا والنجوم توجد في حالات مثارة لذلك فهي تشع . إذن لدراسة النجوم يجب أن نأخذ بعين الاعتبار طاقتها الحرارية . حيث أن ضغطها الترموديناميكي الناتج عن حرارتها العالية هو الذي يوازن قوى الجاذبية لتبقى في هذا الحجم وليس الطاقة الحركية الكوانتية طاقتها الداخلية فان درجة حرارتها ستخف وتبالتالي ضغطها

الترموديناميكي وتصبح قوى الجاذبية هي القوى المسيطرة فان هذه النجوم تتقلص باحثة عن توازن جديد ناتج عن مبدأ هاولي ومحقة الشروط التي وجدناها من أجل $N > N_c$: ان نصف قطرها ينقص بزيادة كتلتها $M = NM$ حسب العلاقة (٨.١٢٦). نسمي هذه النجوم (الأقزام البيضاء) الشكل (٥.٨). بالإضافة الى ذلك فاذا كانت كتلة الحملة اكبر من كتل النجوم العادية (كتلة الشمس على سبيل المثال) فمح ان نأخذ بعين الاعتبار المفاعيل النسبية لانشتين . أخيراً فان النظرية الكوانتية تلعب دوراً حاسماً بالنسبة للجمل الحرة كما يشهد بذلك وجود h في العلاقة (٨.١٢٨) التي هي ذات أبعاد كوسه .



شكل (٨.٥)

الكواكب والأقمار :
 $M =$ عطارد ، $I =$ ايو ، $L =$ القمر
الأرض ، $T =$ نيبتون ، $N =$ زحل
 $S =$ المشتري ، $J =$
الأقزام البيضاء :
ايريداني ، $E =$ فان مانين
 $VM =$ الشعري اليمانية ، $SB =$
كتلة الشمس M_0 ، نصف قطر
الشمس R_0 .

ان القوى الكولونية هي التي تسيطر على حالة جملة مكونة من N جسيما في حالتها الدنيا وتكون أبعادها متناسبة مع $(1/3)$ لكتلتها. حيث تبقى كثافتها ثابتة. عندما تصبح كتلتها أكبر من كتلة معينة نسميها الكتلة الانتقالية فان قوى الجاذبية هي التي تكون مسيطرة وتصغر أبعادها بزيادة كتلتها الى أن تصل الى كتلة حرجة " كتلة شاندررا زيخار M_{ch} " فان الجملة تصبح غير مستقرة وهكذا فان النظرية الكوانتية توضع بشكل كيفي المظاهر الأساسية للأشياء الكونية مثل الكواكب والأقزام البيضاء تمثل النقاط هذه الأشياء بينما يمثل الخط العلاقة النظرية بين كتلة وقطر جملة مكونة من الهيدروجين الصافي ويضع بذلك حداً للمناطق الفيزيائية المسموحة .

الطرق التقريبية في ميكانيك الكم

٢ - طريقة التقريب شبه التقليدي (طريقة W.K.B.)

٦٨ - معادلة هاملتون - جاكوبي في الميكانيك الكلاسيكي :

سنرى في هذه الفقرة امكانية الحصول على نتائج كوانتية انطلاقاً من اعتبارات كلاسيكية . وبصورة خاصة سنبرهن أنه باستخدام معادلة هاملتون - جاكوبي الكلاسيكية نستطيع حساب التابع الخاص الذي يصف الجسيم كما أن الشروط الحدية الموضوعة على هذا التابع تسمح لنا بحساب الطاقة .

لنبدأ أولاً باستنتاج معادلة هاملتون - جاكوبي ولهذا نكتب

عبارة الطاقة :

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + V$$

(٩.١)

وكذلك : $\mathcal{L} = T - V$

وعندئذ نعرف تابع الفعل $S(t)$ بالعلاقة :

$$S(t) = \int \mathcal{L} dt = \int (T - E) dt = S - Et$$

(٩.٢)

حيث رمزنا ب S للمقدار :

ميكانيك الكم ٢ - ١٨

$$S = \int_0^t \mathcal{L} T dt \quad (9.3)$$

الذي لا يتعلق بالزمن بصورة صريحة، فهو يتبع الزمن من خلال (x, y, z) ولمرهان ذلك نحسب dS بطريقتين :
الأولى : نلاحظ من (9.3) حيث نجد مباشرة :

$$dS = \mathcal{L} T dt = m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dt = p_x dx + p_y dy + p_z dz \quad (9.4)$$

الثانية : نفاضل S باعتباره ثابت للاحداثيات والزمن فنجد :

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz + \frac{\partial S}{\partial t} dt \quad (9.5)$$

وبمقارنة (9.4) مع (9.5) نجد بسهولة $(\partial S / \partial t) = 0$ أي أن S لا يحوي الزمن بشكل صريح. وعندئذ نستنتج من المعادلتين السابقتين أن :

$$\vec{P} = \text{grad } S \quad (9.6)$$

ثم بالتبديل في (9.4) نحصل على معادلة هاملتون - جاكوبي المستقرة التالية :

$$(9.7)$$

$$\frac{1}{2m} (\text{grad } S)^2 + V - E = 0$$

أما المعادلة غير المستقرة (المتعلقة بالزمن) فيمكن الحصول عليها بالاعتماد على (9.2) حيث نجد :

$$\text{grad } S(t) = \text{grad } S \quad , \quad E = - \frac{\partial S(t)}{\partial t}$$

وبالتبديل في المعادلة المستقرة (9.7) نجد المعادلة التالية :

$$(9.8)$$

$$\frac{1}{2m} [\text{grad } S(t)]^2 + V + \frac{\partial S(t)}{\partial t} = 0$$

فالمعادلتان (9.6) و (9.8) تقابلان معادلتين شرودنغر المستقرة وغير المستقرة اللتين رأيناها في الفصل الثاني .
 لنحسب S عندما $V=0$ (الجسيم حر) ويكون $\vec{P} = \text{const.}$ و $E = \text{const.}$

وبذلك نجد من (9.4) أن $S = \vec{p} \cdot \vec{r}$ أما تابع الفعل المتعلق بالرسم
متوازي طبقاً لـ (9.2) :

$$S(t) = \vec{p} \cdot \vec{r} - Et \quad (9.9)$$

والاعتماد على (9.4) (الفصل الثاني) نحصل على التابع الموجي
للمسحور :

$$\psi(t) = A e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} = A e^{\frac{i}{\hbar} S(t)} \quad (9.10)$$

أما عندما لا يتعلق التابع بالزمن فإننا نجد :

$$\psi = A e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (9.11)$$

79 - استنتاج معادلة هاملتون - جاكوبي من معادلة شرودنجر :

لنكتب معادلة شرودنجر بالشكل :

$$(H - E) \psi = \left(\frac{p^2}{2m} + V - E \right) \psi = 0 \quad (9.12)$$

فإذا علمنا أن $p = -i\hbar \nabla$ وحسبنا $p^2 \psi$ فإننا نجد :

$$\begin{aligned} p^2 \psi &= p p A e^{\frac{i}{\hbar} S} = p A (-i\hbar \nabla e^{\frac{i}{\hbar} S}) = -i\hbar p \frac{i}{\hbar} \nabla S A e^{\frac{i}{\hbar} S} \\ &= p \nabla S \psi = -i\hbar \nabla (\nabla S \psi) = -i\hbar \nabla^2 S + (\nabla S)^2 \psi \end{aligned}$$

وبالتعويض في (9.12) نحصل على المعادلة التالية :

$$\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + (V - E) - \frac{i\hbar \nabla^2 S}{2m} = 0 \quad (9.13)$$

ولكي تتطابق مع المعادلة (9.8) يجب أن يهمل الحد الأخير أمام
الحد الأول الذي يتناسب مع \hbar وهذا طبيعي عند الانتقال من

الميكانيك التقليدي الى ميكانيك الكم ، وهكذا يجب أن يتحقق ما يسمى بالتقريب شبه التقليدي التالي :

$$\hbar | \psi(x) | \gg \hbar \quad (9.14a)$$

ولكن $\hbar | \psi(x) | = \hbar \sqrt{2m(E-V)}$ وبالتالي $\hbar \sqrt{2m(E-V)} \gg \hbar$ وبالتعويض في

العلاقة السابقة نحصل على المتراجدة : $\frac{\hbar}{p} | \psi(x) | \ll 1$ وفي حالة بعد واحد يكون $p = dp/dx$ ومنه نجد أخيراً :

$$\frac{\hbar}{p} \left| \frac{dp}{dx} \right| = \frac{d(\hbar/p)}{dx} = \frac{d\lambda}{dx} \ll 1 \quad (9.14a)$$

وهذا يعني أن شرط تطبيق التقريب شبه التقليدي على جملة ما هو أن يكون طول موجة دوبروي لها ثابتاً أو يتغير تغيراً طفيفاً جداً بالنسبة للبعد x . وإذا علمنا أن $p = \sqrt{2m(E-V)}$ وحسبنا المشتق في العلاقة الأخيرة فاننا نجد شكلاً آخر لشرط التقريب شبه الكلاسيكي هو :

$$\frac{\hbar}{p} \frac{dp}{dx} = - \frac{m\hbar}{p^3} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{mF\hbar}{p^3} \ll 1 \quad (9.14b)$$

حيث $F = -\partial V/\partial x$ هي القوة التي تؤثر على الجسم . نلاحظ أخيراً أنه لا يمكن تطبيق التقريب شبه الكلاسيكي عندما ينعدم الاندفاع \vec{p} للجسيم لأن المتراجدة (9.14b) لن تتحقق أبداً .

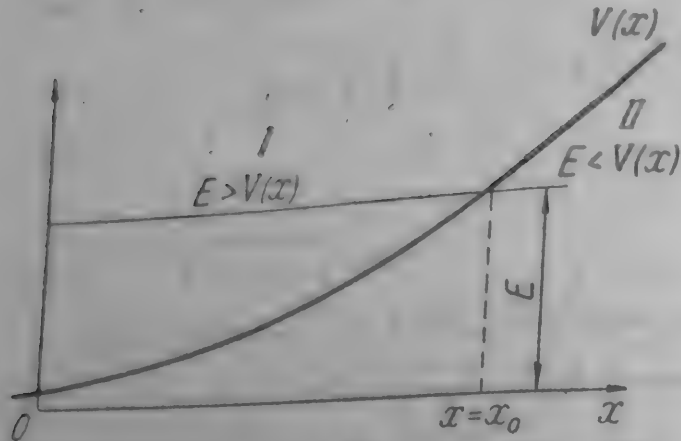
٨٠ - طريقة W.K.B. لحل المعادلة (9.13) :

لقد بذلت عدة محاولات لحل المعادلة (9.13) ونجحت أخيراً على يد ثلاثة علماء هم : Weigel , Kramers , Brillouin ، وقد سميت طريقتهم لحل المعادلة المذكورة بطريقة (W.K.B.) وسنشرح هذه الطريقة فيما يلي :

لنفرض أن الكمون $V(x)$ تابع مستمر لـ x ولنرسم هذا الكمون شكل (9.1) فنلاحظ أن مجال تحول x ينقسم الى قسمين :

١ - على يسار $x = x_0$ حيث $E > V(x)$.

٢- على يمين $x = x_0$ حيث $E < V(x)$.



أما في النقطة $x = x_0$
فمن الواضح أن $E = V$
نحل أولاً المعادلة (9.13)
في المجال $x < x_0$ حيث
 $E > V$ ، ونكتبها
بالشكل :

شكل (9.1)

$$\ddot{z} - i\hbar \dot{z} = 2m(E - V) = p^2 > 0. \quad (9.16)$$

ونبحث عن الحل كما يلي :
حيث S_0 تحوي على \hbar^0 و S_1 تحوي على \hbar^1 .. وهكذا . وسنعمل كافة
الحدود التي تتناسب مع \hbar^2 . وبالتعويض في (9.16) نجد :

$$\ddot{S}_0 + 2\dot{S}_0\dot{S}_1 - i\hbar \ddot{S}_1 = p^2$$

فإذا ساوينا بين الحدود من المرتبة نفسها بالنسبة لقوى \hbar فإنا
 $\ddot{S}_0 = p^2$ ، $2\dot{S}_0\dot{S}_1 - i\hbar \ddot{S}_1 = 0$.

$$S_0 = \pm \int_x^{x_0} p dx, \quad S_1 = i\hbar \ln \sqrt{p}$$

نجد :

ومنه :

وبالتالي يكون الحل :

$$S = S_0 + S_1 = \pm \int_x^{x_0} p dx + i\hbar \ln \sqrt{p}$$

(9.17)

وعندئذ نكتب الحل العام في المجال $x < x_0$ (تقريب أول) كما يلي،
(بعد ملاحظة أنه جيبي) :

$$\psi_{x < x_0} = \frac{1}{\sqrt{p}} \left(A \cos \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_0} p dx + B \sin \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_0} p dx \right) \quad (9.18)$$

وبالطريقة نفسها نحسب الحل في المجال $x > x_0$ حيث p^2 سالبا (بعد

العلم أن الحل سيكون أسياً :

$$\psi_{z > z_0} = \frac{1}{\sqrt{|P|}} \left(D e^{\frac{1}{\hbar} \int_{z_0}^z |P| dx} + C e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{z_0}^z |P| dx} \right) \quad (9.19)$$

حيث : $|P| = \sqrt{2m(V-E)}$

ومما لاشك فيه أن الحلين السابقين يجب أن يتطابقا في النقطة $z = z_0$ وعلى هذا يمكن تطبيق شروط المحدودية والاستمرار عليهما وعلى مشتقاتهما ونتيجة لذلك نحصل على زوجين من التوابع يحققان كل هذه الشروط المذكورة وهما، (ونكتفي بإيراد النتيجة) :

$$\left. \begin{aligned} \psi_{z < z_0} &= \frac{a}{\sqrt{|P|}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_z^{z_0} p dx + \frac{\pi}{4} \right) \\ \psi_{z > z_0} &= \frac{a}{2\sqrt{|P|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{z_0}^z |P| dz} \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

ويمكن البرهان أن التابع التالي سيكون استمراراً تحليلياً للتابع الأول. أما الزوج الثاني فهو :

$$\left. \begin{aligned} \psi_{z < z_0} &= \frac{b}{\sqrt{|P|}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_z^{z_0} p dx + \frac{\pi}{4} \right) \\ \psi_{z > z_0} &= \frac{b}{\sqrt{|P|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{z_0}^z |P| dx} \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

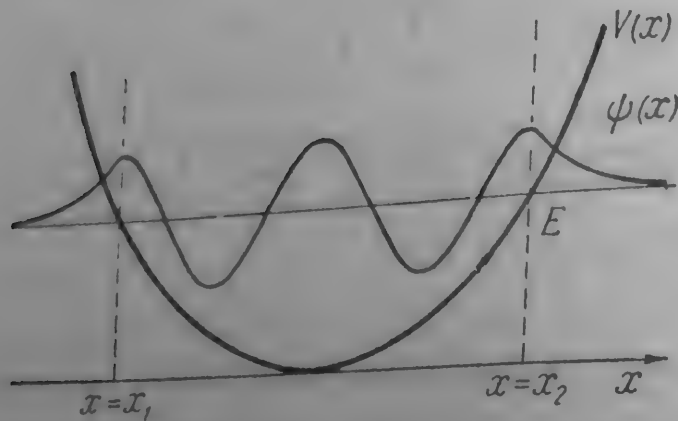
حيث a, b هي ثابتا التنظيم.

81- تطبيق : دراسة جسيم في حفرة كمون بطريقة W.K.B.

لنفرض حفرة كمون نرسمها اختيارياً على الشكل (9.2)، ولنحسب التابع الموجي المنظم الذي يصف الجسيم في هذه الحفرة بطريقة W.K.B. لنأخذ أولاً المجموعة الأولى من الحلول ضمن الحفرة :

$$\psi_{x > x_2} = \frac{a'}{\sqrt{p}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (9.22)$$

$$\psi_{x < x_1} = \frac{a}{\sqrt{p}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (9.23)$$



شكل (9.2)

ومن الضروري أن
يتطابق هذان الحلان
ومشتقاتهما في
المجال $x_2 > x > x_1$
أي :

$$\begin{aligned} a' \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4}\right) - a \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p dx + \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ a' \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4}\right) + a \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p dx + \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (9.24)$$

وحتى يكون لهما حل غير الصفر بالنسبة للمجهولين a و a' يجب
أن ينعدم معين الأمثال ومنه نجد :

$$\sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (9.25)$$

وهذا يتحقق عندما : $\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p dx + \frac{\pi}{4} = (n+1)\pi$: $n=0,1,\dots$
أو :

$$\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p dx = (n+1)\pi - \frac{\pi}{4} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow \oint p dx = 2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (9.26)$$

استكملنا بـ x فاننا
فاذا عوضنا p بقيمتها بدلالة E و V ثم

نجد E ، وهي تشبه ما هو معروف في نظرية بور للذرة .
 أما لحساب الثابت a فنكتب شرط التنظيم ونحصر حدود التكامل
 ضمن الحفرة باعتبار أن التابع ينعدم خارجها حيث نجد :

$$a^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{p} \sin^2 \left[\frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_2} p dx + \frac{\pi}{4} \right] = 1 \quad (9.27)$$

وسنضع القيمة الوسطى لـ \sin^2 التي تساوي $1/2$. وهكذا نجد :

$$\frac{1}{2} a^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{p} = 1 \quad (9.28)$$

ولحساب التكامل نضيف اليه التكامل من x_1 الى x_2 (دورة مغلقة)
 ونستفيد من العلاقة التي تعطي الدور :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v} = 2m \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{p}$$

ومنه نجد :

$$a = \sqrt{\frac{2\omega m}{\pi}} \quad (9.29)$$

وبالتالي يكون التابع الموجي المنظم لجسيم في حفرة الكمون في
 التقريب W, K, B :

$$\psi \approx \sqrt{\frac{2\omega m}{\pi v}} \sin \left(\frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_2} p dx + \frac{\pi}{4} \right) \quad (9.30)$$

ب - نظرية الاضطراب : (Perturbation theory)

كثيراً ما يصعب ايجاد الحل الدقيق لمعادلة شرودنجر (حساب
 التابع ψ وتعيين قيم الطاقة E_n) . الا أنه من الممكن في كثير من
 الأحيان ايجاد حل تقريبي يفي بالغرض ويصف الظاهرة الفيزيائية
 جيداً .

لتكن جملة كوانتية تتأثر بكمون V وهي موصوفة بتابع ψ
 معروف تماماً . فاذا تأثرت بكمون اضافي طفيف ΔV بحيث يكون

٥٧٧ < < ٧ ، فلا بد من البحث عن تابع آخر ψ ، يختلف عن ψ ، لوصف هذه الجملة . وسندرس في هذه الفقرة كيفية الحصول على التابع ψ وحساب قيم الطاقة الجديدة المقابلة له طبقاً لما يسمى نظرية الاضطراب . ولابد من التأكيد أولاً أن هذه الطريقة طبقت بنجاح في مجال الميكانيك السماوي ، حيث يمكن دراسة حركة الأرض ، مثلاً ، بفرض أن الكمون الذي تتأثر به ، نتيجة لوجودها في حقل الشمس المركزي هو $V(r)$ ثم يضاف الكمون $U(r)$ الناتج عن تأثر الأرض بجاراتها الزهرة والمريخ ، كحد اضطرابي ويكون $V(r) \ll U(r)$. أما في ميكانيك الكم فنحسب أولاً التوابع التي تصف أحد الكتلونات ذرة ما وصفاً دقيقاً ، باهمال التأثيرات الناتجة عن الإلكترونات الأخرى ، ثم نأخذ بعين الاعتبار هذه التأثيرات في مرحلة ثانية كحد اضطرابي .

٥٨ - المعادلات العامة لنظرية الاضطراب غير المتعلقة بالزمن :

ليكن \hat{H} مؤثر هاملتون للجملة ولنفرض أنه يتألف من ثلاثة

حدود من الشكل :

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}^0 + \hat{V}' = \hat{H}^0 + \hat{V}' \quad (9.31)$$

حيث $\hat{V}^0 \ll \hat{V}'$ و \hat{V}^0 هو الكمون الرئيسي . وسنفرض أن الحل العام ψ^0 لمعادلة شرودنغر التالية :

$$(\hat{H}^0 - E^0) \psi^0 = 0 \quad (9.32a)$$

معروف تماماً . واعتماداً على هذا الحل وعلى قيم الطاقة المقابلة يطلب إيجاد حل لمعادلة شرودنغر التالية ، (بعد اضافة الحد الاضطرابي) ،

$$(\hat{H}^0 - E^0 - \hat{V}') \psi = 0 \quad (9.32b)$$

ومن ثم حساب ψ و E . ولهذا نبحث عن ψ و E بالشكل :

$$\psi = \psi^0 + \psi' + \psi'' + \dots \quad (9.33)$$

$$E = E^0 + E' + E'' + \dots \quad (9.34)$$

حيث ψ' و E' لامتناهيات في الصغر من المرتبة الأولى بالنسبة لـ ψ^0 و E^0 ، أما ψ'' و E'' فهما لامتناهيات في الصغر من المرتبة الثانية ، وهكذا ... أي أن : $E'' \ll E' \ll E^0$.
لنبدل (9.33) و (9.34) في معادلة شرودنغر (9.326) مقتصرين على التقريب من المرتبة الأولى فنحصل على المعادلة :

$$(E^0 + E' - \hat{H}^0 - \hat{V}') (\psi^0 + \psi') = 0 \quad \text{أو :}$$

$$(E^0 - \hat{H}^0) \psi^0 + (E' - \hat{V}') \psi^0 + (E^0 - \hat{H}^0) \psi' + (E' - \hat{V}') \psi' = 0$$

وبإهمال الحد الأخير، باعتباره لامتناهياً في المرتبة الثانية، أمام الحدود الباقية وملاحظة أن $(E^0 - \hat{H}^0) \psi^0 = 0$ ، حيث تأخذ E^0 القيم $E_1^0, E_2^0, \dots, E_n^0$ المقابلة للتتابع الخاصة $\psi_1^0, \psi_2^0, \dots, \psi_n^0$ والتي ترتبط فيما بينها بالمعادلة :

$$(E_n^0 - \hat{H}^0) \psi_n^0 = 0 \quad (9.36)$$

وعندئذ نجد أن التابع ψ' يحقق المعادلة التالية :

$$(E^0 - \hat{H}) \psi' = - (E' - \hat{V}') \psi^0 \quad (9.37a)$$

وهي معادلة صحيحة دوماً وتنطبق على كل الحالات الكوانتية للجملة المدروسة ، وإذا فرضنا أن هذه الجملة تقع في الحالة الكوانتية n غير المضطربة فهي بالتالي توصف بالتابع ψ_n^0 المقابل للطاقة E_n^0 أي أن :
 $\psi^0 = \psi_n^0$ ، $E^0 = E_n^0$ ، $E' = E_n'$ ، $\psi' = \psi_n'$
وهكذا نحصل من (9.37a) على المعادلة :

$$(E_n^0 - \hat{H}^0) \psi_n' = - (E_n' - \hat{V}') \psi_n^0 \quad (9.37b)$$

وسنبحث عن الحل ψ_n' كمجموع توابع من الشكل ψ_n^0 ، مع العلم أن هذه التوابع ، باعتبارها توابع خاصة للمؤثر \hat{H}^0 ، هي متعامدة ومنظمة

وتحقق الشرط (3.44) ، وهكذا نكتب ψ'_n بالشكل :
(9.38)

$$\psi'_n = \sum_{n'} c_{n'} \psi_{n'}^0$$

وبالتبديل في (9.376) نجد المعادلة :

$$\sum_{n'} c_{n'} (E_n^0 - \hat{H}^0) \psi_{n'}^0 = -(E'_n - \hat{V}') \psi_n^0 \quad (9.39)$$

وبالاستفادة من (9.36) نضع المعادلة السابقة بالشكل :

$$\sum_{n'} c_{n'} (E_n^0 - E_{n'}^0) \psi_{n'}^0 = -(E'_n - \hat{V}') \psi_n^0 \quad (9.40)$$

ومن هذه المعادلة سنعين E'_n و ψ'_n . ولكن الأمر يختلف حسب ما تكون سويات الطاقة منطبقة أو غير منطبقة ولذلك سنعبر كلاً من هاتين الحالتين على حده .

اولاً - الطيف غير منطبق :

يقابل ، في هذه الحالة ، كل قيمة خاصة واحدة لـ E_n^0 تابع وحيد ψ_n^0 ، وعندئذ ، لحساب E'_n ، نضرب طرفي المعادلة (9.40) من اليسار بـ ψ_n^{0*} ونستكمل في كل نقط الفراغ فنجد :

$$\sum_{n'} c_{n'} (E_n^0 - E_{n'}^0) \delta_{nn'} = -E'_n + \int \psi_n^{0*} \hat{V}' \psi_n^0 dV \quad (9.41)$$

ومن الواضح أن الطرف الأيسر يساوي الصفر دوماً : فعندما $n = n'$ يكون $E_n^0 = E_{n'}^0$ وعندما $n \neq n'$ يكون $\delta_{nn'} = 0$ ومنه نحسب عندئذ E'_n حيث نجد :

$$E'_n = V'_{nn} = \langle n | \hat{V}' | n \rangle = \int \psi_n^{0*} \hat{V}' \psi_n^0 dV \quad (9.42)$$

وهي القيمة الوسطى للكمون الإضافي \hat{V}' في الحالة n .

أما لحساب التابع ψ'_n فلا بد من حساب العوامل $C_{n'}$ أولاً ولهذا
نضع المعادلة (9.40) بالشكل :

$$\sum_{n'} C_{n'} (E_n^0 - E_{n'}^0) \psi_{n'}^0 = -(E_n' - \hat{V}') \psi_n^0 \quad (9.41)$$

ثم نضرب الطرفين من اليسار بـ ψ_n^{0*} ونستكمل في كافة نقاط الفراغ،
(مع العلم أن الجمع بـ n' يحوي كل الحدود ماعدا الحد $n'=n$ التي
رأيناها سابقاً)، وعندئذ يكون :

$$\sum_{n'} C_{n'} \int \psi_n^{0*} (E_n^0 - E_{n'}^0) \psi_{n'}^0 dV = \int \psi_n^{0*} (E_n' - \hat{V}') \psi_n^0 dV$$

أو بالشكل :

$$C_{n'} (E_n^0 - E_{n'}^0) = V_{n'n}' = \int \psi_{n'}^{0*} \hat{V}' \psi_n^0 dV \quad (9.42)$$

ومنـه :

$$C_{n'} = \frac{V_{n'n}'}{E_n^0 - E_{n'}^0} \quad (9.43)$$

وبالتعويض في (9.38) نجد عبارة التابع ψ'_n التالية :

$$\psi'_n = C_n \psi_n^0 + \sum_{n'}' C_{n'} \psi_{n'}^0 \quad (9.44)$$

حيث تعني الإشارة (') على المجموع السابق أن هذا المجموع يؤخذ
بكل الحدود ماعدا الحد $n'=n$ ، كما اشترطنا أولاً عند استنتاج
(9.43) ، ويمكن الآن حساب التابع ψ'_n بالتبديل في (9.33) حيث نجد :

$$\psi_n = \psi_n^0 + \psi'_n = \psi_n^0 + C_n \psi_n^0 + \sum_{n'}' C_{n'} \psi_{n'}^0 = C_n^0 \psi_n^0 + \sum_{n'}' C_{n'} \psi_{n'}^0 \quad (9.45)$$

وذلك بفرض $C_n^0 = 1 + C_n$. ولكي ننتهي من هذه المسألة يجب حساب
 C_n^0 ومن ثم حساب C_n ، ولهذا نستفيد من شرط التنظيم للتابع ψ_n
الذي يصف الجملة المضطربة أي أن :

$$\int \psi_n^* \psi_n dV = 1$$

(9.46)

بتبديل التابع ψ_n بقيمته من (9.46) نحصل على العلاقة، (بعد إهمال الحدود من المرتبة الثانية في الصغر):

$$|c_n|^2 \int \psi_n^* \psi_n dV + \sum_{n'} \{ c_n^* c_{n'} \int \psi_n^* \psi_{n'} dV + c_{n'}^* c_n \int \psi_{n'}^* \psi_n dV \} = 1$$

ومنه نستنتج $c_n^0 = 1$ وبالتالي $c_n = 0$. وهكذا نستطيع وضع التابع ψ_n الذي يصف الحالة المضطربة في التقريب الأول بالشكل:

$$\psi_n = \psi_n^0 + \sum_{n'} \frac{V_{n'n}}{E_n^0 - E_{n'}^0} \psi_{n'}^0 \quad (9.41)$$

ثانياً - الطيف منطبق :

يكون طيف موثر ما منطبقاً عندما يقابل قيمة خاصة واحدة عدة توابع خاصة وفي حالتنا هذه يقابل القيمة E_n^0 عدداً من التوابع هي : $\psi_{n_1}^0, \psi_{n_2}^0, \dots, \psi_{n_i}^0$ حيث i عدد هذه التوابع (رتبة الانطباق) . وعندئذ يكون المقدار :

$$\psi_n^0 = \sum_i c_i^0 \psi_{n_i}^0 \quad (9.50)$$

هو حل أيضاً لمعادلة شرودنغر غير المضطربة (9.52a) . وإذا حدث اضطراب معبر عنه بالكمون V' فإن كل شيء يتغير ولا يصبح ψ_n^0 حلاً للمعادلة الجديدة . وعندئذ إذا ضربنا طرفي المعادلة (9.57b) بـ $\psi_{n_i}^0$ ثم استكملنا في كل الفراغ فإننا نحصل على المعادلة :

$$\int \psi_{n_i}^0 (E_n^0 - \hat{H}^0) \psi_n' dV = - \int \psi_{n_i}^0 (E_n' - \hat{V}') \psi_n^0 dV \quad (9.51)$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار هرميتية المؤثر \hat{H}^0 فيمكن وضع المعادلة السابقة بالشكل:

$$\int \psi_n^* (E_n^0 - \hat{H}^0) \psi_{ni}^* dV = - \int \psi_{ni}^* (E_n' - \hat{V}') \psi_n^0 dV \quad (9.52)$$

ولكن ψ_{ni}^0 هو حل لمعادلة شرودنجر بدون الاضطراب وبالتالي يحققها، أي أن الطرف الأيسر يساوي الصفر وبالتالي يكون، (بعد التعبير عن ψ_n^0 بقيمتها طبقاً لـ (9.50) :

$$\int \psi_{ni}^* (E_n' - \hat{V}') \sum c_i^0 \psi_{ni}^0 dV = 0 \quad (9.53)$$

وبما أن التوابع ψ_{ni}^0 متعامدة ومنظمة فيمكن الحصول من (9.53) على المعادلة الأساسية التالية :

$$c_i^0 (E_n' - V_{ii}') = \sum_{i'} c_{i'}^0 V_{ii'}' \quad (9.54)$$

حيث يعطى المقداران V_{ii}' و $V_{ii'}'$ بالعلاقتين :

$$V_{ii}' = \int \psi_{ni}^* V' \psi_{ni}^0 dV \quad \text{و} \quad V_{ii'}' = \int \psi_{ni}^* V' \psi_{ni'}^0 dV \quad (9.55)$$

تؤلف العلاقات (9.54) حيث $(i=1,2,\dots,n)$ مجموعة معادلات جبرية خطية عددها n كافية لحساب العوامل c_i^0 ، وهي توضع بالشكل :

$$\left. \begin{aligned} c_1^0 (E_n' - V_{11}') - c_2^0 V_{12}' & \dots - c_j^0 V_{1j}' = 0 \\ -c_1^0 V_{21}' & c_2^0 (E_n' - V_{22}') \dots + c_j^0 V_{2j}' = 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_1^0 V_{j1}' & \dots & \dots & c_j^0 (E_n' - V_{jj}') = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.56)$$

وحتى يكون لهذه المعادلات حلاً غير الصفر بالنسبة c_i^0 ينبغي أن ينعدم معين الأمثال التالي :

$$\begin{vmatrix} E_n' - V_{11}' & -V_{12}' & \dots & -V_{1j}' \\ -V_{21}' & E_n' - V_{22}' & \dots & -V_{2j}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -V_{j1}' & \dots & \dots & E_n' - V_{jj}' \end{vmatrix} = 0 \quad (9.57)$$

وهي عبارة عن معادلة جبرية من المرتبة n بالنسبة إلى E_n هذا
 يحمل على n قيمة للطاقة. وبالتالي فإن الانطباق يمكن أن يسرول
 كلياً أو جزئياً عند تطبيق الكمون V' ، وذلك تبعاً لاختلاف قيم الطاقة
 E_n الناتجة من حل المعادلة السابقة (9.57).

83- نظرية الاضطراب الالمستقرة (المتعلقة بالزمن) :

من المعلوم أن حل معادلة شرودنغر غير المستقرة السالفة :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \hat{H}^0 \right) \psi(t) = 0 \quad (9.58)$$

يعطى بالعلاقة :

$$\psi(t) = \sum_n c_n e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} \psi_n(x) \quad (9.59)$$

حيث يمثل c_n طويلة احتمال وجود الجسيم في الحالة E_n ، وعند حدوث
 اضطراب يتغير موءثر هاملتون بمقدار \hat{V}' وتصبح المعادلة :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \hat{H}^0 - \hat{V}' \right) \psi(t) = 0 \quad (9.60)$$

ويطلب الآن معرفة الحل $\psi(t)$ وحساب القيم الخاصة الجديدة. ولهذا
 نتبع الطريقة نفسها التي تستخدم في المعادلات التفاضلية فنعرض أن
 c في (9.59) يتعلق بالزمن ونبدل (9.59) في (9.60) فحد بالاعتماد

$$\text{على (9.58) أن :} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_n \dot{c}_n \psi_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} = \sum_n \hat{V}'(t) c_n \psi_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad (9.61)$$

لنضرب الطرفين بـ $\psi_n^* e^{\frac{i}{\hbar} E_n t}$ ونستكمل في كل نقط الفراغ فحد :

$$\frac{\hbar}{i} \int \psi_n^* e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} \sum_n \dot{c}_n \psi_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} dV = \int \sum_n \psi_n^* e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} \hat{V}'(t) c_n \psi_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} dV \quad (9.62)$$

ومنه نجد المعادلة الأساسية التالية لحساب \dot{c}_n :

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{c}_n = \sum_{n'} c_{n'} V'_{nn'} e^{i \omega_{nn'} t} \quad (9.63)$$

$$w_{n'n} = \frac{E_{n'} - E_n}{\hbar} \quad \text{حيث :} \quad (9.64)$$

وليس من الممكن حل هذه المعادلة بشكل دقيق ولهذا نستخدم تقريب نظرية الاضطراب فنفرض الحل من الشكل :

$$C_{n'} = C_{n'}^0 + C_{n'}' + C_{n'}'' + \dots \quad (9.65)$$

حيث $C_{n'}^0$ لا يحوي V' ، $C_{n'}'$ يحوي V' من المرتبة الاولى وهكذا ... نبدل (9.65) في (9.63) فنحصل على المعادلة :

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{C}_{n'} = -\frac{\hbar}{i} (\dot{C}_{n'}^0 + \dot{C}_{n'}' + \dot{C}_{n'}'' + \dots) = \sum_{n''} C_{n''} V_{n'n''}' e^{i\omega_{n'n''}t} \quad (9.66)$$

ومنه نجد :

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{C}_{n'}^0 = 0 \quad (\text{التقريب الصفري}) \quad (9.67)$$

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{C}_{n'}' = \sum_{n''} C_{n''}^0 V_{n'n''}' \quad (\text{التقريب الاول}) \quad (9.68)$$

... وهكذا نكتب التقريبات المتتالية .

ويبدو من (9.67) أن $C_{n'}^0$ لا يتعلق بالزمن أي أن :

$$C_{n'}^0 = \text{const.} \quad (9.69)$$

وبما أن $C_{n'}^0$ ثابتة فيمكن أن نؤخذ هذه القيمة قبل بدايات الاضطراب . فإذا فرضنا أن الجسم (الكترون مثلا) كان موجوداً في البدء في الحالة n وبالتالي فإن طويلة الاحتمال هي $C_{nn}^0 = \delta_{nn}$ وعندئذ إذا بدلنا في التقريب الاول (9.68) فإننا نحصل على $\dot{C}_{n'}(t)$ التالية :

$$\dot{C}_{n'}'(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_{n''} \delta_{nn''} e^{i\omega_{n'n''}t} V_{n'n''}'(t) = -\frac{i}{\hbar} e^{i\omega_{n'n}t} V_{n'n}'(t)$$

وبالاستكمال نحصل على :

$$c'_{n'}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int e^{i\omega_{n'n}t} V'_{n'n}(t) dt \quad (9.70)$$

بحسب احتمال الانتقال في ميكانيك الكم ، منسوباً الى واحدة الزمن ، فإذا علمنا أن احتمال وجود الجسم في الحالة n' هو $|c_{n'}|^2$ فإن احتمال الانتقال يساوي :

$$W = \frac{2}{\hbar} \sum_{n'} |c_{n'}|^2 \quad (9.71)$$

وتعتبر العلاقتان (9.70) و (9.71) أساسيتين لدراسة عدة ظواهر في ميكانيك الكم على أساس التقريب الأول لنظرية الاضطراب غير المستقرة . وتعتبر دراسة الاشعاع احدى أهم هذه الظواهر .



مسائل الفصل التاسع

١ - يتحرك جسيم عديم السبين في حقل مركزي $V(r)$ بحيث تكون طاقته $E_{n\ell}$ معلومة . استخدم نظرية الاضطراب في التقريب الأول لحساب التغير على الطاقة الذي يحدث نتيجة لوضع الجسيم في حقل مغناطيسي ضعيف \vec{B} ، يتجه باتجاه المحور z ، ناتج عن كمون شعاعي \vec{A} نطلب حسابه أولاً .

٢ - دوّار مستوي يتأثر بحقل كهربائي \vec{E} متجانس وضعيف وسحبه باتجاه المحور z . احسب طبقاً لنظرية الاضطراب الطاقة الاضافية الناتجة عن تطبيق الحقل \vec{E} مع العلم أن هذا الدوّار يعتبر كجسدة كهربائية تتحرك على دائرة في المستوى xy .

٣ - احسب التصحيح اللازم اضافته الى الطاقة في المرحلة الثانية في الصغر (أي $E_{n\ell}''$) وذلك في الحالة العامة من نظرية الاضطراب .
٤ - نطبق على هزاز بسيط توافقي على بعد واحد x الاضطراب الخاصة $W = -\frac{1}{2} \alpha x^4$ ، أوجد باستخدام نظرية الاضطراب التوابع الخاصة والقيم الخاصة بعد تطبيق الاضطراب .

٥ - نطبق على هزاز بسيط توافقي على بعد واحد x الاضطراب $W = \frac{1}{2} m \omega^2 x^4$ حيث : $(m \in \mathbb{R}, m \ll 1)$ ، أوجد باستخدام نظرية الاضطراب التوابع الخاصة والقيم الخاصة بعد تطبيق الاضطراب .

٦ - نطبق على هزاز بسيط توافقي على بعد واحد x الاضطراب $W = \sigma \hbar \omega x^5$ حيث $(\sigma \in \mathbb{R}, \sigma \ll 1)$ ، أوجد باستخدام نظرية الاضطراب التوابع الخاصة والقيم الخاصة بعد تطبيق الاضطراب .

يسمى الهزاز بعد تطبيق الاضطراب الهزاز اللاتوافقي .
ملاحظة : يمكن استخدام هذا التمرين في حساب الاهتزازات اللاتوافقية لجزئية ثنائية الذرة .

٧ - نطبق على هزاز بسيط توافقي على بعد واحد x الاضطراب $W = \lambda x^4$ حيث $(\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \ll 1)$ ، أوجد باستخدام نظرية الاضطراب

التواضع الخاصة والقيم الخاصة للهزان بعد تطبيق
الاضطراب . يسمى الهزان بعد تطبيق الاضطراب الهزان
اللاتوافقي .



الفصل العاشر

مدخل إلى ميكانيك الكم النسبي

٨٤ - معادلة كلاين - غوردون (Equation de Klein-Gordon)

تطبق معادلة شرودنغر ، التي درسناها في الفصول السابقة من هذا الكتاب على الجسيمات التي تتحرك بسرعة صغيرة بالمقارنة مع سرعة الضوء c . ومن الجدير بالذكر أن هذه المعادلة ليست لامتغيرة بالنسبة لتحويلات لورنتز : وهي شرط النسبية بضرورة أن يكون لكل \vec{r} و t دور متناظر في المعادلة . حيث أن معادلة شرودنغر تربط المشتق الأول للزمن t بالمشتق الثاني للموضع \vec{r} .

سنحاول في هذا الفصل دراسة الجسيمات ذات السرعة القريبة من سرعة الضوء بواسطة معادلتين : معادلة كلاين - غوردون ومعادلة ديراك . و لايجاد المعادلتين السابقتين سنتبع الخطوات نفسها التي قمنا بها لايجاد معادلة شرودنغر : أي أننا سنقوم بايجاد العلاقة التي تربط الطاقة الكلية للجلمة المدروسة E بدفعها \vec{p} :

$$E = f(\vec{p})$$

(١٥.١)

ومن ثم نبدل E و \vec{p} بموءثرات حسب التالي :

$$E \rightarrow i\hbar \partial/\partial t$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

(١٥.٢)

(١٥.٣)

وذلك بفرض أن الجملة مكونة من جسيم حر ، أما في حالة خضوع الجملة السابقة لحقل كهربي موصوف بالكمونين : الشعاع \vec{A} والسلمي V فإننا نبدل E و \vec{P} بالمؤثرات :

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - qV \quad (10.4)$$

$$\vec{P} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A} \quad (10.5)$$

حيث q شحنة الجسيم .
سنقوم في هذه الفقرة بإيجاد معادلة كلاين - غوردون وذلك انطلاقاً من العلاقة التي تربط بين طاقة جسيم حر E وكتلته السكونية m_0 ودفعه \vec{P} :

$$E = \sqrt{c^2 P^2 + m_0^2 c^4} \quad (10.6)$$

بتبديل كل من E و \vec{P} في هذه العلاقة بمؤثرات نواجه المشكلة التالية : كيف يؤثر المؤثر \vec{P} الموجود تحت الجذر التربيعي على التوابع الموجية ، وهذه المشكلة ناتجة عن لاوحدانية الجذر التربيعي. لتخطي هذه المشكلة نقوم بتربيع العلاقة (10.6) فنجد :

$$E^2 - c^2 P^2 - m_0^2 c^4 = 0 \quad (10.7)$$

بالتبديل بالمؤثرات (10.4) و (10.5) نجد المعادلة التالية :

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{r}, t) + c^2 \hbar^2 \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) - m_0^2 c^4 \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (10.8)$$

وهي معادلة كلاين - غوردون بالنسبة لجسيم حر . بضرب طرفي هذه المعادلة بـ $1/\hbar^2 c^2$ والترتيب نجد :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\vec{r}, t) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (10.9)$$

ان المعادلة (10.9) هي معادلة تنسورية في الفضاء الزماني المكاني وبالتالي فهي لامتغيرة تحت تأثير تحويلات لورنتز . بفرض أن :

$$K = \frac{m_0 c}{\hbar}$$

وبالانتباه الى أن مؤثر D المبير يعطى بالعلاقة :

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

يمكننا كتابة معادلة كلاين - غوردون (10.9) بالشكل :

(10.12) من الجدير بالذكر أن معادلة كلاين - غوردون (10.12) نفسها
الأمواج المستوية حولا لها :

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (10.13)$$

حيث ترتبط ω بـ k بالعلاقة :

$$\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \quad (10.14)$$

هذه الحلول هي عبارة عن توابيع خاصة للمؤثرين \vec{P} و E تقابل
القيم الخاصة $\hbar k$ و $\hbar \omega$ على الترتيب . في الحقيقة بتعويض (10.13)
في (10.12) فإننا نجد أن E و \vec{P} يحققان العلاقة (10.1)

$$\hbar \omega = \pm \sqrt{c^2 \hbar^2 k^2 + m_0^2 c^4} \quad (10.15)$$

ونلاحظ أن للطاقة جذرين : موجباً وسالباً .

15 - معادلة الاستمرار :

تعطى معادلة الاستمرار بالعلاقة :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = 0 \quad (10.16)$$

حيث $\rho(\vec{r}, t)$ كثافة الشحنة و $\vec{J}(\vec{r}, t)$ كثافة التيار . نستطيع
الحصول على معادلة الاستمرار اعتباراً من معادلة كلاين - غوردون ،
وذلك بضرب العلاقة (10.9) بـ $\psi^*(\vec{r}, t)$ من اليسار وجمع الناتج
إلى المرافق العقدي للمعادلة نفسها بعد ضربه بـ $\psi(\vec{r}, t)$ من
اليسار أيضاً :

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi - \frac{1}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} \psi \right) = 0 \quad (10.17)$$

يمكن كتابة هذه المعادلة بشكل يشابه شكل المعادلة (10.16) :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) + \nabla \cdot \left(\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \psi \right) = 0 \quad (10.18)$$

وذلك بفرض أن :

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (10.19)$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2m_0 i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (10.20)$$

نلاحظ أن المعادلة التي تعطي كثافة التيار النسبية (10.20)، مطابقة تماما للمعادلة الانسبية ، وأن كثافة الشحنة النسبية (10.19) تتحول إلى كثافة شحنة لانسبية عندما تكون $u \ll c$ ($E = m_0 c^2$) ، وفي حالة كون مستويات الطاقة مستقرة أي :

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \quad (10.21)$$

ونأخذ بالتالي كثافة الشحنة الشكل :

$$\rho = \psi^* \psi \quad (10.22)$$

يجب الإشارة هنا إلى أن المناقشة السابقة ، التي أجريناها على كثافة الشحنة ، صحيحة بشرط كون الطاقة موجبة فقط ، أما في حالة كونها سالبة فليس هناك من معنى لكثافة الشحنة .

86 - معادلة ديراك (Dirac Equation, Equation de Dirac)

حصلنا في الفقرة (84) على معادلة كلاين - غوردون ، وهي معادلة تصف الجسيمات ذات السبين المعدوم $s = 0$ ، بتربيع المعادلة (10.6) ومن ثم استبدال \vec{p} و E بمؤثرات .

من الجدير بالذكر أن هناك طريقة أخرى وهي طريقة ديراك ، وتقوم طريقة ديراك على فكرة أنه يجب أن تكون العلاقة ، التي تربط الطاقة E بالدفع \vec{p} و بالطاقة السكونية $m_0 c^2$ ، علاقة خطية ، ولهذا فقد فرض ديراك أن :

$$E = \hat{p} m_0 c^2 + c \hat{\alpha} \vec{p} = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (10.23)$$

حيث $\hat{\alpha}$ و \hat{p} مؤثرات لا تتبادل فيما بينها . ولكي تتحقق هذه العلاقة يجب أن تحقق العلاقة :

$$(\hat{\beta}, \hat{\alpha}) = \hat{\beta}, \hat{\alpha}$$

$$m_0 c^4 + (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) c^2 = \hat{\beta}^2 m_0 c^4 + m_0 c^3 \sum_k (\hat{\alpha}_k \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_k) \hat{p}_k + c^2 \sum_k \sum_l \hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_l \hat{p}_k \hat{p}_l \quad (10.24)$$

حيث $(k, l = x, y, z)$ ، مطابقة في \hat{p}_x و \hat{p}_y و \hat{p}_z و m_0 صعد (10.25a)

$$\hat{\alpha}_k^2 = \hat{\beta}^2 = 1$$

(10.25b)

$$\hat{\alpha}_k \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_k = 0$$

(10.25c)

$$\hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_l + \hat{\alpha}_l \hat{\alpha}_k = 2 \delta_{kl}$$

يبرهن على أنه يمكن تمثيل المؤثرات \hat{H} و \hat{M} بمصفوفات مرتبة (4×4) وعلى أنه لا يوجد مصفوفات أدنى من هذه المرتبة تحقق العلاقات (10.25) ، وهذا ما سنراه في الفقرة التالية ، وهذا يقتضي بأن يمثل التابع الموجي ψ ، الذي يحقق معادلة ديراك ، بمصفوفة ذات عمود واحد (4×1) ، وهذا يقتضي أيضا بأن يكون للجسيم ، الموصوف بالتابع الموجي ψ درجات حرية داخلية موصوفة بـ $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ ، بالإضافة لدرجات حرّيته الخارجية الموصوفة بـ \vec{r} و \vec{p} .
كتابة الطرف الأول من المعادلة (10.23) بالشكل :

$$\hat{E} - c \sum_k \hat{\alpha}_k \hat{p}_k - \hat{\beta} m_0 c^2 = 0 ; (k = x, y, z) \quad (10.26)$$

وباستبدال \hat{E} و \vec{p} بالمؤثرات (10.2) و (10.3) نحصل على معادلة ديراك التي تصف جسما حراً :

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \sum_k \hat{\alpha}_k \nabla_k - \hat{\beta} m_0 c^2) \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (10.27)$$

تكتب هذه المعادلة بشكل يشابه معادلة شرودنجر :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H}_0 \psi(\vec{r}, t) \quad (10.28)$$

حيث \hat{H}_0 هو مؤثر الهاملتوني في معادلة ديراك لجسيم حر : (10.29)

$$\hat{H}_0 = \hat{\beta} m_0 c^2 + c \hat{\alpha} \hat{p}$$

ويعطى \hat{H}_0 في حالة كون الجسم خاضعاً لحقل كهرومغناطيسي بالعلاقة :

$$\hat{H}_0 = \hat{\beta} m_0 c^2 + c \hat{\alpha} [\hat{p} - q \hat{A}(\vec{r})] + q \hat{V}(\vec{r}) \quad (10.30)$$

من الجدير بالذكر أن معادلة ديراك تختلف عن معادلة شرودنغر لكونها خطية بالنسبة للمشتقات المكانية .

87 - مصفوفات ديراك :

لاحظ ديراك أنه حتى يكون الهاملتوني \hat{H}_0 هرميتي يجب أن تكون المصفوفات $\hat{\alpha}_k$ و $\hat{\beta}$ هرميتية، وهذا يقتضي تحقق ما يلي :

$$\hat{\alpha}_k = \hat{\alpha}_k^+ = (\hat{\alpha}_k)^* \quad : (k = x, y, z) \quad (10.31a)$$

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}^+ = (\hat{\beta})^* \quad (10.31b)$$

حيث يرمز كل من $\hat{\beta}$ و $\hat{\alpha}_k$ لمنقولي المصفوفتين $\hat{\alpha}_k$ و $\hat{\beta}$ على الترتيب، وهكذا :

$$\hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_k^+ = 1 \quad : (k = x, y, z) \quad (10.32a)$$

$$\hat{\beta} \hat{\beta}^+ = 1 \quad (10.32b)$$

مما يعني أن المصفوفات $\hat{\alpha}_k$ و $\hat{\beta}$ هي مصفوفات واحدة، ولاحظ أيضاً من العلاقة (10.25b) أن :

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha}_k &= -\hat{\beta} \hat{\alpha}_k \hat{\beta}^+ \\ \hat{\beta} &= -\hat{\alpha}_k \hat{\beta} \hat{\alpha}_k^+ \end{aligned} \right\} : (k = x, y, z) \quad (10.33)$$

وهذا يقتضي بأن أثر المصفوفات $\hat{\alpha}_k$ و $\hat{\beta}$ معدوم، وهكذا فإنها يجب أن تكون من أبعاد زوجية وأبسط شكل لها هو أن تمثل بمصفوفات من المرتبة (4×4) ، ولاحظ ديراك أيضاً أن خواص المصفوفات $\hat{\alpha}_k$ و $\hat{\beta}$ مطابقة تماماً لخواص مصفوفات باولي فاقترح إدخال المصفوفات $\hat{\sigma}_k$ و $\hat{\sigma}_k^+$ وهي مصفوفات من المرتبة (4×4) ، لربط المصفوفات $\hat{\alpha}_k$ و $\hat{\beta}$ بمصفوفات باولي، ومعرفة بالشكل التالي :

$$\hat{\sigma}'_k = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_k & \hat{\sigma}'_k \\ \hat{\sigma}'_k & \hat{\sigma}_k \end{pmatrix} \quad (k = x, y, z) \quad (10.34)$$

حيث $\hat{\sigma}_k$ تمثل مصفوفات باولي التالية :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma}_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma}_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.35)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hat{O}' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.36)$$

حيث :

من الجدير بالذكر هنا أن خواص المصفوفات $\hat{\sigma}'_k$ و $\hat{\sigma}_k$ ، التي اقترح ادخالها ديراك ، تطابق خواص مصفوفات باولي : فمربعاتها تساوي مصفوفة الواحدة :

$$\hat{\sigma}'_k = \hat{\sigma}_k = \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.37)$$

وأن المصفوفات $\hat{\sigma}'_k$ لا تقبل التبادل فيما بينها ، وكذلك المصفوفات

$$[\hat{\sigma}'_k, \hat{\sigma}'_l] = i \epsilon_{klm} \hat{\sigma}'_m \quad (k, l = x, y, z) \quad (10.38)$$

$$[\hat{\sigma}_k, \hat{\sigma}_l] = i \epsilon_{klm} \hat{\sigma}_m \quad (10.39)$$

حيث أدخلنا الاصطلاح :

$$\epsilon_{klm} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الأدلة مرتبة دورياً} \\ -1 & \text{إذا كانت الأدلة غير دورية} \\ 0 & \text{إذا تساوي دليلان أو أكثر} \end{cases} \quad (10.40)$$

حيث $k \rightarrow l$:

أو بشكل آخر :

$$\hat{\sigma}'_k \hat{\sigma}'_l + \hat{\sigma}'_l \hat{\sigma}'_k = \hat{\rho}_k \hat{\rho}_l + \hat{\rho}_l \hat{\rho}_k = \delta_{kl} \quad (10.41)$$

وسبرهن أيضا على أن المصفوفات $\hat{\sigma}'_k$ و $\hat{\rho}_k$ تقبل التبادل فيما بينها :

$$[\hat{\sigma}'_k, \hat{\rho}_k] = 0 \quad ; \quad (k, k' = x, y, z) \quad (10.42)$$

اقترح ديراك أيضا أنه يجب أن يكون شكل المصفوفات 2 و $\hat{\rho}$ كما يلي :

$$\hat{\alpha}_k = \hat{\rho}_k \hat{\sigma}'_k = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}'_k & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}'_k \end{pmatrix} \quad ; \quad (k = x, y, z) \quad (10.43a)$$

$$\hat{\beta} = \hat{\rho}_3 = \begin{pmatrix} \hat{I}' & 0 \\ 0 & -\hat{I}' \end{pmatrix} \quad (10.43b)$$

نلاحظ أن مصفوفات ديراك تحقق العلاقات (10.42) حيث :

$$\hat{\alpha}_k^2 = \hat{\rho}_k^2 \hat{\sigma}_k^2 = \hat{I} \quad (10.44)$$

$$\hat{\beta}^2 = \hat{\rho}_3^2 = \hat{I} \quad (10.45)$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_k &= \hat{\rho}_2 \hat{\sigma}'_k \hat{\rho}_3 + \hat{\rho}_3 \hat{\rho}_2 \hat{\sigma}'_k = \\ &= \hat{\rho}_2 \hat{\rho}_3 \hat{\sigma}'_k + \hat{\rho}_3 \hat{\rho}_2 \hat{\sigma}'_k = \\ &= (\hat{\rho}_2 \hat{\rho}_3 + \hat{\rho}_3 \hat{\rho}_2) \hat{\sigma}'_k = 0 \end{aligned} \quad (10.46)$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_l + \hat{\alpha}_l \hat{\alpha}_k &= \hat{\rho}_2 \hat{\sigma}'_k \hat{\rho}_k \hat{\sigma}'_l + \hat{\rho}_l \hat{\sigma}'_l \hat{\rho}_k \hat{\sigma}'_k = \\ &= \hat{\rho}_k^2 \hat{\sigma}'_k \hat{\sigma}'_l + \hat{\rho}_k^2 \hat{\sigma}'_l \hat{\sigma}'_k = \\ &= \hat{\rho}_k^2 (\hat{\sigma}'_k \hat{\sigma}'_l + \hat{\sigma}'_l \hat{\sigma}'_k) = 0 \end{aligned} \quad (10.47)$$

يعطى الشكل المفصل لمصفوفات ديراك على النحو التالي :

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(10.48)

$$\hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(10.49)

$$\hat{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(10.50)

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(10.51)

88- كثافتا الشحنات والتيار :
بما أن مرتبة المصفوفات $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هي (4×4) فإن التابع الموجي الذي يحقق معادلة ديراك (10.27) هو عبارة عن مصفوفة من عمود واحد (4×1) ليكن :

$$\vec{\psi}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \\ \psi_3(\vec{r}, t) \\ \psi_4(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$$

(10.52)

فيكون مرافقه الهرميتي $\vec{\psi}^\dagger(\vec{r}, t)$ عبارة عن مصفوفة من سطر واحد (1×4) :

$$\psi^+(\vec{r}, t) = (\psi_1(\vec{r}, t) \psi_2(\vec{r}, t) \psi_3(\vec{r}, t) \psi_4(\vec{r}, t)) \quad (10.53)$$

بجمع معادلة ديراك (10.7) بعد ضربها من اليسار بـ $\psi^+(\vec{r}, t)$ التي مرافقها العقدي بعد ضربها بـ $\psi(\vec{r}, t)$ نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^+ \psi) + \text{منه} (\psi^+ \psi) \quad (10.54)$$

وهي معادلة الاستمرار نفسها (10.16) بفرض أن :

$$\rho(\vec{r}, t) = \psi^+(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) \quad (10.55)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = c \psi^+(\vec{r}, t) \vec{\sigma} \psi(\vec{r}, t) \quad (10.56)$$

نلاحظ أن كثافة الشحنة (10.55) لها الشكل اللانسيبي نفسه ، ويفسر وجود الحد $c \vec{\sigma}$ في العلاقة (10.56) على أنه مؤثر السرعة.

89 - حلول معادلة ديراك لجسيم حر :

يقبل المؤثران \hat{H}_0 و \hat{P} التبادل وذلك من أجل الالكترون الحر ، هكذا يمكن ايجاد قاعدة مشتركة من أشعثهما الخاصة : هذه القاعدة هي الأمواج المستوية . ونلاحظ أنه من أجل كل قيمة خاصة لـ \hat{P} هناك قيمتان خاصتان لـ \hat{H}_0 وهما :

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (10.57)$$

وهكذا فإن طيف \hat{H}_0 مكوّن من طيفين مستمرين : الطيف الأول ويحوي قيم الطاقة التي تنتمي الى المجال $[m_0 c^2, +\infty]$ الطيف الثاني يحوي قيم الطاقة التي تنتمي الى المجال $[-\infty, -m_0 c^2]$.

سنحاول في هذه الفقرة ايجاد حلول معادلة ديراك للالكترون الحر آخذين بعين الاعتبار أنه يمكن أن يأخذ القيم الموجبة أو السالبة للطاقة ، يجب الإشارة هنا الى أن دراسة الطاقة السالبة أدت الى توقع وجود البوزيترون والى ادخال مفهوم جديد بالنسبة للجسيمات الأولية وهو مفهوم صنديد الجسيم . وفي النهاية ادخال احتمال تحوّل

الجسيمات الأولية .
بتعويض التابع الموجي (10.54) في معادلة ديراك (10.47) نحصل على :

$$i\hbar \begin{pmatrix} \partial\psi_1/\partial t \\ \partial\psi_2/\partial t \\ \partial\psi_3/\partial t \\ \partial\psi_4/\partial t \end{pmatrix} = i\hbar c \sum_k \hat{\alpha}_k \begin{pmatrix} \nabla_k \psi_1 \\ \nabla_k \psi_2 \\ \nabla_k \psi_3 \\ \nabla_k \psi_4 \end{pmatrix} + \beta m_0 c^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (10.58)$$

وهو شكل معادلة ديراك المصفوفي ، ونلاحظ أنها كأمثلة مكونة من أربع معادلات تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى وهي خطية ومتجانسة في المركبات ψ_i . إذا استبدلنا $\hat{\alpha}_k$ و $\hat{\beta}$ حسب العلاقات (10.48-51) فان معادلة ديراك تأخذ الشكل التالي :

$$i\hbar \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi_4}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\hbar c \left(\frac{\partial\psi_4}{\partial x} - i \frac{\partial\psi_4}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial z} \right) + m_0 c^2 \psi_1 \\ -i\hbar c \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + i \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_4}{\partial z} \right) + m_0 c^2 \psi_2 \\ -i\hbar c \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - i \frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \right) + m_0 c^2 \psi_3 \\ -i\hbar c \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + i \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \right) + m_0 c^2 \psi_4 \end{pmatrix} \quad (10.59)$$

تقبل معادلة ديراك حلاً على شكل أمواج مستوية مستقرة :

$$\vec{\psi}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \\ \psi_3(\vec{r}, t) \\ \psi_4(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (10.60)$$

حيث b_1 و b_2 و b_3 و b_4 مستقلة عن الزمن والاحداثيات ولكنها
 يمكن أن تكون متعلقة بالقيم الخاصة لـ \hat{P} و \hat{E} . ان التوابع
 (10.60) هي توابع خاصة لسوثرات الطاقة والدفع (10.4) و
 (10.3) مقابلة للقيم الخاصة بـ $E = \hbar \omega$ و $\vec{P} = \hbar \vec{k}$ على الترتيب.
 بتعويض المعادلة (10.60) في (10.59) آخذين بعين الاعتبار أن

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{E}{\hbar} \quad \text{و} \quad \nabla_{\vec{r}} = \frac{\vec{P}}{\hbar} \quad \text{فنجده:}$$

$$E \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(p_x b_4 - i p_y b_4 + p_z b_3) + m_0 c^2 b_1 \\ c(p_x b_3 + i p_y b_3 - p_z b_4) + m_0 c^2 b_2 \\ c(p_x b_2 - i p_y b_2 + p_z b_1) + m_0 c^2 b_3 \\ c(p_x b_1 + i p_y b_1 - p_z b_2) + m_0 c^2 b_4 \end{pmatrix} \quad (10.61)$$

تكتب المعادلة (10.61) على شكل جملة من أربع معادلات خطية
 متجانسة في b_1 و b_2 و b_3 و b_4 :

$$\begin{aligned} (E - m_0 c^2) b_1 - c p_z b_3 - c(p_x - i p_y) b_4 &= 0 \\ (E - m_0 c^2) b_2 + c p_z b_4 - c(p_x + i p_y) b_3 &= 0 \\ (E - m_0 c^2) b_3 - c p_z b_1 - c(p_x - i p_y) b_2 &= 0 \\ (E - m_0 c^2) b_4 + c p_z b_2 - c(p_x + i p_y) b_1 &= 0 \end{aligned} \quad (10.62)$$

يوجد لجملة المعادلات (10.62) حل غير تافه اذا وفقط اذا كان معين
 أمثالها معدوماً أي :

$$\begin{vmatrix} (E - m_0 c^2) & 0 & -c p_z & -c(p_x - i p_y) \\ 0 & (E - m_0 c^2) & -c(p_x + i p_y) & c p_z \\ -c p_z & -c(p_x - i p_y) & (E + m_0 c^2) & 0 \\ -c(p_x + i p_y) & c p_z & 0 & (E + m_0 c^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (10.63)$$

$$[(E^2 - m_0^2 c^4) - c^2 p^2]^2 = 0$$

(10.64)

وهي بالعلاقة النسبية الكلاسيكية بين الطاقة والدفع ونلاحظ أن لها جذرين : أحدهما موجب والآخر سالب .

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

(10.63)

وهما الجذران اللذان تحدثنا عنهما في بداية هذه الفقرة . ومن هنا تظهر أهمية معادلة ديراك وحلولها بشكل أمواج مستوية اذان معادلة واحدة تعطينا مجموعتين من الحلول :

$$1 - \text{مجموعة الحلول المقابلة للجذر الموجب } E_+ = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$2 - \text{مجموعة الحلول المقابلة للجذر السالب } E_- = -\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

نستطيع الحصول على حلين مستقلين في p من أجل المجموعة الأولى من الحلول المقابلة للجذر الموجب E_+ ، فاذا وضعنا في المعادلات

$$A - 1 \quad b_3 = 1 \quad \text{و} \quad b_4 = 0 \quad \text{نجد :}$$

$$b_1 = \frac{c p_x}{E_+ - m_0 c^2}, \quad b_2 = \frac{c (p_x + i p_y)}{E_+ - m_0 c^2} \quad (10.66)$$

$$B - 1 \quad b_3 = 0 \quad \text{و} \quad b_4 = 1 \quad \text{نجد :}$$

$$b_1 = \frac{c (p_x - i p_y)}{E_+ - m_0 c^2}, \quad b_2 = \frac{-c p_x}{E_+ - m_0 c^2} \quad (10.67)$$

وبالمقابل نستطيع أيضا الحصول على حلين مستقلين في p من أجل المجموعة الثانية من الحلول المقابلة للجذر السالب E_- ، إذا وضعنا في المعادلات :

$$A - 1 \quad b_2 = 0 \quad \text{و} \quad b_1 = 1 \quad \text{نجد :}$$

$$b_3 = \frac{c p_x}{E_- + m_0 c^2}, \quad b_4 = \frac{c (p_x + i p_y)}{E_- + m_0 c^2} \quad (10.68)$$

ميكانيك الكم ٢ - ٢٠

نجد هذا المعين نجد :

$$[E^2 - m_0^2 c^4 - c^2 p^2]^2 = 0 \quad (10.64)$$

وهي بالعلاقة النسبية الكلاسيكية بين الطاقة والدفع ولاحظ أن لها مدرتين : أحدهما موجب والآخر سالب .

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (10.65)$$

وهما الجذران اللذان تحدثنا عنهما في بداية هذه الفقرة . ومن هنا تظهر أهمية معادلة ديراك وحلولها بشكل أمواج مسوية لأن معادلة واحدة تعطينا مجموعتين من الحلول :

$$1 - \text{مجموعة الحلول المقابلة للجذر الموجب } E_+ = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$2 - \text{مجموعة الحلول المقابلة للجذر السالب } E_- = -\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

ستطيع الحصول على حلين مستقلين في \mathbf{p} من أجل المجموعة الأولى من الحلول المقابلة للجذر الموجب E_+ ، فإذا وضعنا في المعادلات

$$a - \text{ } b_3 = 1 \text{ و } b_4 = 0 \text{ نجد :}$$

$$b_1 = \frac{c p_x}{E_+ - m_0 c^2}, \quad b_2 = \frac{c (p_x + i p_y)}{E_+ - m_0 c^2} \quad (10.66)$$

$$b - \text{ } b_3 = 0 \text{ و } b_4 = 1 \text{ نجد :}$$

$$b_1 = \frac{c (p_x - i p_y)}{E_+ - m_0 c^2}, \quad b_2 = \frac{-c p_x}{E_+ - m_0 c^2} \quad (10.67)$$

وبالمقابل نستطيع أيضا الحصول على حلين مستقلين في \mathbf{p} من أجل المجموعة الثانية من الحلول المقابلة للجذر السالب E_- ، إذا وضعنا في المعادلات :

$$a - \text{ } b_1 = 1 \text{ و } b_2 = 0 \text{ نجد :}$$

$$b_3 = \frac{c p_x}{E_- + m_0 c^2}, \quad b_4 = \frac{c (p_x + i p_y)}{E_- + m_0 c^2} \quad (10.68)$$

ميكانيك الكم ٢ - ٢٠

ب - $b_1 = 0$ و $b_2 = 1$ نجد :

$$b_3 = \frac{c(p_x - i p_y)}{E_- + m_0 c^2}, \quad b_4 = \frac{-c p_z}{E_- + m_0 c^2} \quad (10.69)$$

وهكذا فان حلول معادلة ديراك وهي عبارة عن بي - سبينورات هي من أجل المجموعة الأولى من الحلول المستقلة المقابلة للطاقة الموجبة : E_+

$$U_P^I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c p_z}{E_+ - m_0 c^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E_+ - m_0 c^2} \end{pmatrix} \quad (10.70)$$

$$U_P^{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - i p_y)}{E_+ - m_0 c^2} \\ \frac{-c p_z}{E_+ - m_0 c^2} \end{pmatrix} \quad (10.71)$$

أما البي-سبينورات المرافقة للمجموعة الثانية من الحلول المستقلة المقابلة للطاقة السالبة E_- :

$$-U_P^{III} = \begin{pmatrix} \frac{c p_z}{E_- + m_0 c^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E_- + m_0 c^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.72)$$

$$U_p = \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - i p_y)}{E + m_0 c^2} \\ \frac{-c p_z}{E + m_0 c^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(10.73)

ونلخص خواص الحلول ψ_k من حيث الطاقة والدفع والقيمة الخاصة لـ S_3 (السبين) في الجدول التالي :

ψ_4	ψ_3	ψ_2	ψ_1	
$-E$	$-E$	$+E$	$+E$	الطاقة
$-\vec{p}$	$-\vec{p}$	$+\vec{p}$	$+\vec{p}$	الدفع
$-\hbar/2$	$+\hbar/2$	$-\hbar/2$	$+\hbar/2$	السبين

يجب الإشارة هنا الى أن البي - سبينورات تأخذ شكلاً بسيطاً عندما يكون $\vec{p} = 0$ ، حيث نجد أن هاملتون ديراك يصبح $\hat{H}_D = \hat{\beta} m_0 c^2$ فمن أجل المجموعة الأولى من الحلول المقابلة للطاقة الموجبة $E_+ = m_0 c^2$ هي :

$$u_p^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_p^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.74)$$

وهي من أجل المجموعة الثانية الحلول المقابلة للطاقة السالبة $E_- = -m_0 c^2$:

$$v_p^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_p^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.75)$$

90- نظرية الثقوب :
ان قيم \hat{H}_D الخاصة التي يمكن أن تأخذ قيما سالبة حتى - $m_0 c^2$ تسبب مشكلة في تفسير معناها الفيزيائي .

في الدقيقة، يمكننا أن نعتبر الحالات المقابلات للقيم الخاصة السالبة عبارة عن حلول رياضية ليس لها معنى فيزيائي، وناخذ بعين الاعتبار الحالات المقابله للقيم الخاصة الموجبة فقط لوصف الالكترون. ولكن ومن حيث المبدأ، لاشيء يمنع الكترونًا موجوداً في حالة طاقتها موجبة، من الانتقال الى حالة طاقتها سالبة باصداره فوتوناً. وبما أن الجمل تميل في تطورها الى الاستقرار في حالة ذات طاقة دنيا، فيجب أن تنتهي جميع الالكترونات الموجودة في الكون الى حالة طاقتها ∞ - في نهاية المطاف. ولهذا فقد وضع ديراك عام (1930) الفرضيات التالية :

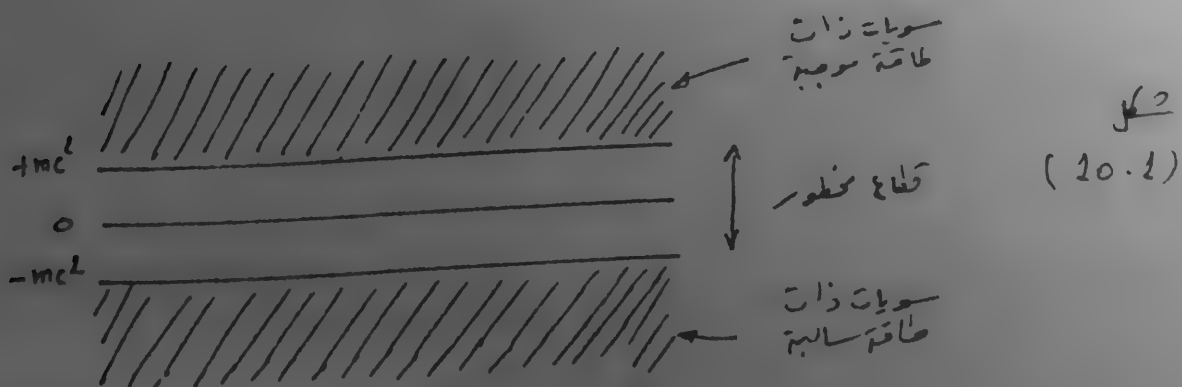
آ - نفرض أن الجسيمات موجودة في حجم منته وهذا يقود الى أن طاقاتها مكتمة .

ب - يمثل الفراغ الحالة الدنيا وتكون طاقته هي الطاقة الدنيا.
ج - تكون جميع الحالات ذات الطاقة السالبة مشغولة في الفراغ.
د - نستطيع فقط ملاحظة الاضطرابات التي تحدث في الفراغ، وهذه الاضطرابات لايمكن أن تكون الا على الشكلين التاليين :

1 - زيادة في الطاقة : وهي تمثل جسيما طاقته موجبة ولله دفع \vec{p} وسبين \vec{s} وشحنة e - " الالكترون مثلاً " .

2 - نقص في الطاقة : وهي تمثل ثقب طاقته سالبة وله دفع \vec{p} وسبين \vec{s} وشحنة e والذي يظهر كجسيمة طاقة $E > 0$ - ودفع $-\vec{p}$ وسبين \vec{s} - " البوزيترون مثلاً " .

ينتج من هذه الفرضيات : أنه لايسمح للالكترون ، الذي هو فيرميون، أن يشغل حالة طاقتها سالبة لأنها جميعاً مشغولة (مبدأ باولي)، وهذا ما يسمح للذرة بأن تبقى مستقرة، الشكل (10.1)



بما أن الالكترونات ذات الطاقة الموجبة لا تستطيع الانتقال إلى حالات ذات طاقة سالبة بسبب انشغالها جميعاً ، فإن العملية المعاكسة ممكنة الحدوث . فإذا امتص الكترون ، طاقته سالبة ، فوتونا طاقته أكبر أو تساوي $m_0 c^2$ فيمكنه الانتقال إلى حالة ذات طاقة موجبة تاركاً وراءه ، في بحر الطاقات السالبة ، نفساً . تقابل هذه العملية ظاهرة خلق الزوج الكترون - بوزيترون $(e^- e^+)$ ، حسب المعادلة :



وقد أثبتت هذه الظاهرة تجريبياً بواسطة اندرسون (Anderson) عام 1932 . أما الظاهرة المعاكسة ، وهي ظاهرة فناء الزوج الكترون - بوزيترون ، فتفسر على أنها اجتماع الالكترون بالثقب ، حسب المعادلة :



وهكذا وبالرغم من كون معادلة ديراك لا تستطيع إلا دراسة حسيم نسبي واحد ، فقد تنبأت بوجود ضديد الجسيمات الأولية الأمر الذي أثبتته التجربة في وقت لاحق .



ملحق I

عوامل الجمع الشعاعي أو عوامل كليش - غوردان

(Vector addition coefficients or Clebsch-Gordan coefficients)

كثيراً ما نحتاج عند دراسة مجموعة كوانتية مؤلفة من جسيم له عزم حركي \hat{L} موصوف بالعدد الكمي l وسبين \hat{S} موصوف بالعدد الكمي s ، نحتاج الى جمع هذين العزمين المداري والسبيني أي : $\hat{L} + \hat{S}$ ومعرفة التابع الخاص والقيم الخاصة الموافقة وقد تصادفنا هذه المشكلة أيضاً عند دراسة مجموعة كوانتية مؤلفة من جسيمين يمكن اهمال التأثير المتبادل بينهما (مثلاً الكترونان على مدار خارجي حول النواة) . وهذا ما سندرسه بالتفصيل في هذه الفقرة الأخيرة .

ليكن \hat{J}_1 ، \hat{J}_2 العزمين المطلوب جمعهما وحساب القيم الخاصة والتوابع الخاصة للمؤثر المكون من مجموعهما ، ونستخدم رموز ديراك فنكتب التابع الموجي $\chi^m(l, s)$ بالشكل $\langle s, m | l, m \rangle$ أو $\langle l, m | s, m \rangle$ لنلاحظ أولاً أن \hat{J}_1 و \hat{J}_2 يحققان علاقات التبادل التالية :

$$[\hat{J}_1(l), \hat{J}_2(l)] = 0 \quad , \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (1)$$

ولنفرض أن القيم الخاصة والتوابع الخاصة معروفة لكل منهما أي :

$$J^2(l) = \hbar^2 j_l(j_l + 1) \quad , \quad J^2(l) = \hbar^2 j_l(j_l + 1) \quad (2)$$

وكذلك :

$$J_z(l) = \hbar m_l \quad , \quad J_z(l) = \hbar m_l \quad (3)$$

أي أن $|j_1, m_1\rangle$ هو التابع الخاص (متجه الحالة الكوانتية) للمؤثر $\hat{J}_1(l)$ و $|j_2, m_2\rangle$ هو التابع الخاص (متجه الحالة الكوانتية) للمؤثر $\hat{J}_2(l)$. ولناخذ جداء المتجهين السابقين ونكتبه بالشكل :

$$|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1, m_2\rangle \quad (4)$$

وبما أن m_1 تتحول من j_1 الى $j_1 + 1$ و m_2 من j_2 الى $j_2 + 1$ فانه يوجد $(2j_1+1)(2j_2+1)$ تابعاً خاصاً مختلفاً بـ m_1 أو m_2 .
نعرف الآن بمؤثر مجموع عزمين حركيين \hat{J} بالعلاقة :

$$\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2 \quad (5)$$

ومن السهل أن نبرهن أن مركباته تحقق العلاقات التبادلية (4)، أما مسقط \hat{J} على المحور z فهو المؤثر \hat{J}_z حيث :

$$\hat{J}_z = \hat{J}_{z1} + \hat{J}_{z2} \quad (6)$$

فاذا أثرنا به على التابع (4) فاننا نجد :

$$\begin{aligned} \hat{J}_z |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= (\hat{J}_{z1} + \hat{J}_{z2}) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = \\ &= \hbar(m_1 + m_2) |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = \hbar m |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \quad (7) \end{aligned}$$

وهكذا فإن التابع (4) هو تابع خاص للمؤثر \hat{J}_z أيضاً وقيمة الخاصة هي $\hbar m$. ولحساب ذلك للمؤثر \hat{J}^2 نكتب :

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\hat{J}_1 \hat{J}_2 \quad (8)$$

وهو يتبادل مع كل من \hat{J}_1^2 و \hat{J}_2^2 ولهذا يمكن أن يكون له معهما قيمة خاصة وتابع خاص في الوقت نفسه . ومن الطبيعي أن لا تكون التوابع (4) توابعا خاصة للمؤثر \hat{J}^2 وذلك بسبب وجود الحد $\hat{J}_1 \hat{J}_2$ الذي يحوي على حالات مختلفة بـ m_1 و m_2 ، ولكن اذا اعتبرنا الخواص التبادلية المذكورة للمؤثر \hat{J}^2 فيمكن أن نفرض أن توابعه الخاصة هي تركيب خطي من التوابع $|j_1, m_1\rangle$ و $|j_2, m_2\rangle$ التي هي توابع خاصة مشتركة للمؤثرات \hat{J}_1^2 و \hat{J}_2^2 و \hat{J}_z أي :

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \quad (9)$$

حيث تعبر العوامل $\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle$ عن الوزن الاحصائي للحالات المختلفة المشتركة في الجمع وتسمى عوامل الجمع الشعاعي أو عوامل كليبيش - غوردان وهي ، كما نلاحظ من (9) ، تتوelf عناصر مصفوفة التحويل من القاعدة $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ الى القاعدة $|j, m\rangle$ وقد يرمز

لهذه العوامل برمز يختلف قليلاً في بعض المراجع الأخرى فيكتب مثلاً: (m_1, m_2, m_3, m_4) كما يعبر عنها أحياناً بواسطة ما يسمى بالرمز $\{m\}$ الذي نتعرض له في نهاية هذه الفقرة .

تلعب عوامل الجمع الشعاعي دوراً هاماً في الفيزياء الدرسية والنوية وفي كثير من تطبيقات ميكانيك الكم الأخرى ولذلك سورد أهم خواصها فيما يلي :

نلاحظ أولاً أنها تنعدم عندما لا تتحقق العلاقة :

(١٥)

$$m = m_1 + m_2$$

وبالتالي فإن الجمع السابق في (٩) سيكون عملياً بأحد الوسيطين m_1 أو m_2 إذا أعطى m ، ولمعرفة عدد القيم التي يمكن أن يأخذها $\{m\}$ ندرس أولاً القيم الممكنة للعدد m فنلاحظ من (١٥) أن القيمة العظمى لـ m هي $m_1 + m_2$ وذلك لأن أكبر قيمة لـ m يجب أن تعادل أكبر قيمة لـ m_1 (أي m_1) وأكبر قيمة لـ m_2 (أي m_2) وهكذا فإن التابع الخاص المقابل هو $\{m_1, m_2, m_1, m_2, \dots\}$ والقيمة المقابلة لـ m هي $m_1 + m_2$.

أما عندما نأخذ القيمة التالية لـ m (أصغر بواحد) أي $m = m_1 + m_2 - 1$ فيشارك بالجمع (٩) التابعين $\{m_1, m_2, m_1, m_2, \dots\}$ وهذا يقابل فميسر لـ m أيضاً هما : $m_1 + m_2 - 1$ و $m_1 + m_2$ (إذ لا يمكن لـ m أن تكون أصغر من مسقطها وبالتالي فهناك قيمتان فقط) أما إذا أخذنا القيمة التالية لـ m وهي $m = m_1 + m_2 - 2$ فنجد بسهولة أنها تحوي مجموعة مؤلفة من ثلاثة توابع تشترك بالجمع (٩) وهي :

$$\{m_1, m_2, m_1, m_2, m_1, m_2, \dots\}, \{m_1, m_2, m_1, m_2, m_1, m_2, \dots\}, \{m_1, m_2, m_1, m_2, m_1, m_2, \dots\}$$

وهذا يقابل طبعاً ثلاث قيم لـ m هي :

$$m_1 + m_2, m_1 + m_2 - 1, m_1 + m_2 - 2$$

وإذا تابعنا هذه العملية فاننا سنصل الى الحد الذي تكون فيه $m_1 = -m_2$ أو $m_2 = -m_1$ وهذه يجب أن تقابل القيمة الصغرى لـ m

(إذ لا يمكن لـ m_1 أو m_2 أن تنقصا بعدئذ) ، وهكذا تكون القيمة الصغرى لـ J (التي يجب أن تكون موجبة) هي $J = J_1 - J_2$ أي أن J يجب أن تحقق ما يسمى شرط المثلث التالي :

$$J_1 - J_2 \leq J \leq J_1 + J_2 \quad (11)$$

وبما أن عوامل كليش - غوردان هي مصفوفات التحويل من قاعدة إلى أخرى فيجب أن تحقق شرطي التوحيد والتعامد التاليين :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{J, m} \langle J_1, J_2, m_1, m_2 | J, m \rangle \langle J_1, J_2, m'_1, m'_2 | J, m \rangle &= \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \\ \sum_{m_1, m_2} \langle J_1, J_2, m_1, m_2 | J, m \rangle \langle J_1, J_2, m_1, m_2 | J, m' \rangle &= \delta_{J m} \delta_{J m'} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

وهذا ما يعبر عن واحدية التحويل وفي حالة التحويل العكسي (أي من القاعدة $|J_1, J_2, J, m\rangle$ إلى $|J_1, J_2, m_1, m_2\rangle$) فيمكن استعمال المصفوفة نفسها طالما أن العوامل السابقة حقيقية أي :

$$|J_1, J_2, m_1, m_2\rangle = \sum_{J, m} \langle J_1, J_2, m_1, m_2 | J, m \rangle |J, m\rangle \quad (13)$$

تسمح الخواص التناظرية لعلاقة المثلث التي تحققها الأعداد الكوانتية الثلاثة J_1, J_2, J بإجراء بعض التحولات في عوامل الجمع الشعاعي فمثلاً بتغيير موضعي كل من J_1 و J_2 ومسقطيهما نجد :

$$\langle J_1, J_2, m_1, m_2 | J, m \rangle = (-1)^{J_1 + J_2 - J} \langle J_2, J_1, m_2, m_1 | J, m \rangle$$

وبالتالي نستنتج العلاقة التالية بين التابعين المقابلين :

$$|J_1, J_2, J, m\rangle = (-1)^{J_1 + J_2 - J} |J_2, J_1, J, m\rangle \quad (14)$$

ونورد أخيراً بعض العلاقات الهامة التي تستخدم لحساب عوامل الجمع الشعاعي (علماً أننا أوردنا في نهاية هذا الملحق قيم عوامل كليش - غوردان المقابلة لمجموع عزمين مختلفين) :

$$\left. \begin{aligned} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m \rangle &= (-1)^{j_1+j_2-j} \langle j_1, j_2, -m_1, -m_2 | j, -m \rangle \\ &= (-1)^{j_1+m_2} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_1+1}} \langle j_1, j_2, -m_1, m_2 | j, -m \rangle \\ &= (-1)^{j_1-m_1} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_2+1}} \langle j_1, j_2, m_1, -m | j, -m \rangle \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

وكثيراً ما نستخدم العلاقات التالية في الحسابات البسيطة لعوامل الجمع الشعاعي :

$$\langle j_1, j_2, m_1, -m | 0, 0 \rangle = (-1)^{j_1-m} \frac{\delta_{j_1, j_2}}{\sqrt{2j_1+1}} \quad (16)$$

$$\langle j_1, 0, m, 0 | j, m \rangle = \langle j_1, j_2, j_1, j_2 | j_1+j_2, j_1+j_2 \rangle = 1 \quad (17)$$

$$\langle j_1, 1, m, 0 | j, m \rangle = \frac{m}{\sqrt{j(j+1)}} \quad (18)$$

$$\langle j_1, 2, m, 0 | j, m \rangle = \frac{3m^2 - j(j+1)}{\sqrt{j(j+1)(2j-1)(2j+3)}} \quad (19)$$

لنذكر أخيراً أنه كثيراً ما يستخدم عوضاً عن الرمز السابق

$\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m \rangle$ الرمز j_3 الذي يكتب بالشكل :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

أما العلاقة بين الرمز j_3 فهي :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2-j_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j_3 - m_3 \rangle \quad (20)$$

وقد يفضل استعمال الرمز الأخير لتمتعه بخواص تناظرية عالية .

CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A $\sqrt{}$ is to be understood over every coefficient; e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

$j_1 \times j_2$	j	M	...
$m_1 \quad m_2$	M	M	...
	Coefficients		

$$1/2 \times 1/2$$

1	1	0
$+1/2$	$+1/2$	1
$-1/2$	$-1/2$	1
$-1/2$	$+1/2$	$-1/2$
$-1/2$	$-1/2$	1

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$$2 \times 1/2$$

$5/2$	$5/2$	$3/2$
$+2$	$1/2$	1
$+2$	$-1/2$	$1/5$
$+1$	$+1/2$	$4/5$
$+1$	$-1/2$	$-1/5$
0	$+1/2$	$2/5$
0	$-1/2$	$-2/5$
-1	$+1/2$	$3/5$
-1	$-1/2$	$-3/5$

$$3/2 \times 1/2$$

2	2	1
$+3/2$	$+1/2$	1
$+3/2$	$-1/2$	$1/4$
$+1/2$	$+1/2$	$3/4$
$+1/2$	$-1/2$	$-1/4$
$-1/2$	$+1/2$	$1/2$
$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$
$-3/2$	$+1/2$	$1/4$
$-3/2$	$-1/2$	$-1/4$

$$3/2 \times 1/2$$

2	2	1
$+3/2$	$+1/2$	1
$+3/2$	$-1/2$	$1/4$
$+1/2$	$+1/2$	$3/4$
$+1/2$	$-1/2$	$-1/4$
$-1/2$	$+1/2$	$1/2$
$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$
$-3/2$	$+1/2$	$1/4$
$-3/2$	$-1/2$	$-1/4$

$$2 \times 1$$

3	2	1
$+2$	$+1$	$+2$
$+2$	0	$1/3$
$+1$	$+1$	$2/3$
$+1$	-1	$-1/3$
0	$+1$	$6/15$
0	-1	$-1/15$
-1	$+1$	$1/6$
-1	-1	$-1/6$

$$2 \times 1$$

3	2	1
$+2$	$+1$	$+2$
$+2$	0	$1/3$
$+1$	$+1$	$2/3$
$+1$	-1	$-1/3$
0	$+1$	$6/15$
0	-1	$-1/15$
-1	$+1$	$1/6$
-1	-1	$-1/6$

$$2 \times 1$$

3	2	1
$+2$	$+1$	$+2$
$+2$	0	$1/3$
$+1$	$+1$	$2/3$
$+1$	-1	$-1/3$
0	$+1$	$6/15$
0	-1	$-1/15$
-1	$+1$	$1/6$
-1	-1	$-1/6$

$$2 \times 1$$

3	2	1
$+2$	$+1$	$+2$
$+2$	0	$1/3$
$+1$	$+1$	$2/3$
$+1$	-1	$-1/3$
0	$+1$	$6/15$
0	-1	$-1/15$
-1	$+1$	$1/6$
-1	-1	$-1/6$

$$1 \times 1$$

2	1	0
$+1$	$+1$	2
$+1$	0	$1/2$
0	$+1$	$1/2$
0	-1	$-1/2$
-1	$+1$	$1/2$
-1	-1	$-1/2$

$$1 \times 1$$

2	1	0
$+1$	$+1$	2
$+1$	0	$1/2$
0	$+1$	$1/2$
0	-1	$-1/2$
-1	$+1$	$1/2$
-1	-1	$-1/2$

$$1 \times 1$$

2	1	0
$+1$	$+1$	2
$+1$	0	$1/2$
0	$+1$	$1/2$
0	-1	$-1/2$
-1	$+1$	$1/2$
-1	-1	$-1/2$

$$1 \times 1$$

2	1	0
$+1$	$+1$	2
$+1$	0	$1/2$
0	$+1$	$1/2$
0	-1	$-1/2$
-1	$+1$	$1/2$
-1	-1	$-1/2$

$$1 \times 1$$

2	1	0
$+1$	$+1$	2
$+1$	0	$1/2$
0	$+1$	$1/2$
0	-1	$-1/2$
-1	$+1$	$1/2$
-1	-1	$-1/2$

$$1 \times 1$$

2	1	0
$+1$	$+1$	2
$+1$	0	$1/2$
0	$+1$	$1/2$
0	-1	$-1/2$
-1	$+1$	$1/2$
-1	-1	$-1/2$

$$Y_l^{-m} = (-1)^m Y_l^m$$

$$d_{m,0}^l = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^m e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j M \rangle = (-1)^{j-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j j M \rangle$$

$$d_{lm}^1 = (-i)^l m \sin \theta \cos \theta, \quad d_{lm}^0 = (-i)^l m \cos \theta$$

$$2 \times 3/2$$

$1/2$	$3/2$
$1/2$	$5/2$
$1/2$	$7/2$

$$3/2 \times 3/2$$

$1/2$	$3/2$
$1/2$	$5/2$
$1/2$	$7/2$

$$d_{1/2, 1/2}^1 = \cos \theta$$

$$d_{1/2, -1/2}^1 = -\sin \theta$$

$$d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$$

$$d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$d_{0,0}^1 = \cos \theta$$

1	1
1	1
1	1

$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$

$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$

$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$

$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$

$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$

$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$

$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$

$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$

$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$

Sign convention is that of Wigner (Group Theory, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (The Theory of Atomic Spectra, Cambridge Univ. Press, New York, 1935). Rose (Elementary Theory of Angular Momentum, Wiley, New York, 1957), and Cohen (Tables of the Clebsch-Gordan coefficients, North American Nuclear Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1970). The signs and numbers in the current tables have been calculated by computer programs written independently by Cohen and at LBL. (Tables extended April 1974.)

ملحق II

تابع ديراك $\delta(x)$

آ - يعرف هذا التابع كما يلي :



$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq 0 \\ \infty & \text{if } x = 0 \end{cases} \quad (II.1)$$

على أن تتحقق العلاقة :

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1 \quad ; (a < 0 < b) \quad (II.2)$$

شكل (II.1)

تعني هذه العلاقة أن مساحة السطح المحصور بين التابع $\delta(x)$ ومحور السينات تساوي الواحد (شكل (II.1)) .
ان الخاصة الأساسية لتابع ديراك هي :

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad ; (a < 0 < b) \quad (II.3)$$

ويسهل برهان هذه الخاصة اذا علمنا أن $f(x) \delta(x) = 0$ في كل نقط الفراغ ماعدا النقطة $x=0$ حيث تصبح قيمة التابع $f(x)$ هي $f(0)$ وعندئذ يمكن اخراجها خارج التكامل ، أما الباقي فيساوي الواحد طبقاً لـ (II.2) .

إذا نقلنا المحور الشاقولي إلى النقطة $x = x_0$ فيمكن تعريف التابع $\delta(x - x_0)$ بشكل مشابه لما سبق أي بالشكل :

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq x_0 \\ \infty & \text{if } x = x_0 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

مع تحقق العلاقة :

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = 1 \quad (a < x_0 < b) \quad (\text{II.5})$$

وينطبق على هذا التابع في النقطة $x = x_0$ كل ما ينطبق على $\delta(x)$ في النقطة $x = 0$. والجدير بالذكر أنه توجد توابع أخرى تحقق الخواص نفسها التي يحققها التابع $\delta(x)$ وبالتالي يمكن ادماجها معه وهي :

$$1) \delta(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{\pi x} : (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

$$2) \delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)}$$

$$3) \delta(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}$$

$$4) \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx$$

وهنا يمكن تعميم التعريف ليشمل ما يسمى تابع ديراك ثلاثي الأبعاد التالي :

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dx dy dz$$

ب - يتصف تابع ديراك بالخواص التالية، (التي يمكن البرهان على صحتها دون صعوبة)، وهي :

(تابع زوجي)

$$1) \delta(x) = \delta(-x)$$

$$2) x \delta(x) = 0$$

$$3) \delta(x)' = -\delta'(-x)$$

حيث $\delta'(x)$ هو مشتق تابع ديراك الذي يعرف بالعلاقة :

$$\int f(x) \delta'(x) dx = -f'(0)$$

أي أن مشتق تابع ديراك $\delta(x)$ هو التابع $\delta'(x)$ الذي يحقق العلاقة السابقة .

$$4) x \delta'(x) = -\delta(x)$$

$$5) \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$6) \delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x-a) + \delta(x+a)]$$

$$7) \delta F(x) = \sum_n \frac{1}{F'(x_n)} \delta(x - x_n)$$

حيث x_n هي جذور التابع $F(x)$.

$$8) \int \delta(a-x) \delta(x-b) dx = \delta(a-b) , (a \neq b)$$

$$9) f(x) \delta(x-a) = f(a) \delta(x-a)$$



دليل المصطلحات العلمية

انكليزي - فرنسي - عربي

انكليزي

فرنسي

عربي

- A -

Absorption

Absorption

امتصاص

Accidental

Accidentelle

تصادفي

- degeneracy

- (dégénérescence)

تطابق تصادفي

Addition

Addition

جمع

- of angular momenta

- des moments angulaires الحركية

A djoint

A djoint

مرافق

- of an operator

- (opérateur)

موءثر مرافق

Amplitude

Amplitude

مطال

Angular momentum

Angulaire (moment)

عزم حركي

Annihilation

Annihilation

فناء

- operator

- (opérateur d')

موءثر الفناء (الهدم)

Asymmetric

Antisymétrique

لامتناظر

Approximation

Approximation

تقريب

- methods

- (méthode d')

طرق التقريب

Atom

Atome

ذرة

- (Hydrogen)

- d'Hydrogène

ذرة الهيدروجين

Average value

Valeur moyenne

القيمة الوسطى

- B -

Barrier

Barrière

حاجز

- of potential

- de potentiel

حاجز كمون

Basis

Base

قاعدة

- (discrete)

- discrète

قاعدة متقطعة

- (continuous)	- continue	قاعدة مستمرة
Bessel functions	Bessel (fonctions de)	توابع بيسل
Bose - Einstein statistics	Bose - Einstein (statistique de)	احصاء بوز - انيشتاين
Bosons	Bosons	بوزونات
Bra	Bra	برا
- C -		
Canonical	canoniques	قانوني
- equation of motion	(équation) - (du mouvement)	المعادلات القانونية للحركة
- variables	- (variables)	متحولات قانونية
Central field	Central (champ)	حقل مركزي
Centre of mass	Centre de masse	مركز الكتلة
Characteristic equation	Caractéristique (équation)	المعادلة المميزة
Classical mechanics	Classique (mécanique)	الميكانيك الكلاسيكي
Clebsch - Gordan	Clebsch - Gordan	
- coefficients	- (coefficients de)	معاملات كليش - غوردان
Commutation relations	Commutation (relations de)	علاقات التبادل
Conservation	Conservation	انحفاظ
- of angular momentum	- du moment angulaire	انحفاظ العزم الحركي
- of energy	- de l'énergie	انحفاظ الطاقة
- of probability	- de la probabilité	انحفاظ الاحتمال
Continuous spectrum	Continu (spectre)	طيف مستمر
Convergence	convergence	تقارب
Creation operator	Création (opérateur de)	مؤثر الخلق (التكوين)
Current density	Courant (densité de)	كثافة تيار
- D -		
De Broglie relation	De Broglie (relation de)	علاقة دو بروي
Degeneracy	Dégénérescence	انطباق

- of exchange	- d'échange	انطباق التبادل
Delta function	Delta (fonction de)	تابع دلتا
Density	Densité	كثافة
- of states	- d'états	كثافة الحالات
Deuterium	Deutérium	دوتيريوم
Determinant of Slater	Déterminant de Slater	معين سلاتر
Diagonal matrix	Diagonale (matrice)	مصفوفة قطرية
Dirac	Dirac	ديراك
- delta function	-(fonction delta de)	تابع دلتا لـديراك
- notations	-(notations de)	رموز ديراك
- relativistic equation	-(équation relative de)	معادلة ديراك النسبية
Discrete spectrum	Discret (spectre)	طيف متقطع
Distribution	Distribution	توزع
- of Bose-Einstein	- de Bose-Einstein	توزع بوز-اينشتاين
- of Fermi-Dirac	- de Fermi-Dirac	توزع فيرمي-ديراك
Duality	Dualité	مثنوية
- of wave-corpucle	- onde-corpucule	مثنوية موجة-جسيمية
- E -		
Effect	Effet	مفعول
Eigenequation	Equation caracteristique	المعادلة المميزة
Eigenfunction	Fonction propre	تابع خاص
Eigenvalue	Valeur propre	قيمة خاصة
Eigenvector	Vecteur propre	شعاع خاص
Electromagnetic field	Electromagnétique	حقل كهرومغناطيسي
Electron spin	Electron (spin d')	سبين الالكترون
Elementary particles	Elémentaires (particules)	جسيمات أولية
Energy	Energie	طاقة
- levels	-(niveaux d')	سويات الطاقة

- states
Equation of motion
Exchange degeneracy
- energy
Excitation
Excited state
Exclusion principle

- (états d')
Equation du mouvement
Echange (dégénérescence d')
- (énergie d')
Excitation
Excité (état)
Exclusion (principe d')

حالات الطاقة
معادلة الحركة
انطباق التبديل
طاقة التبديل
اشارة
حالة مشاركة (مهيجة)
مبدأ الاستبعاد

- F -
Fermi-Dirac statistic
- distribution
Fermions
Free particle
Fundamental stat

Fermi-Dirac (statistic de)
- (distribution de)
Fermions
Particule libre
Fondamental (état)

احصاء فيرمي-ديراك
توزع فيرمي-ديراك
فيرميونات
جسيم حر
حالة دنيا (أصلية)

- G -
Gauge
Generalized coordinates
- momentum
Gerlach: see Stern
Ground state
Group
Gyromagnetic ratio

Gauge
Généralisées (coordonnées)
Généralisé (moment)
Gerlach: voir Stern
Etat fondamental
Groupe
Gyromagnétique (rapport)

معيار
احداثيات معممة
اندفاع معمم
غير لاخ
حالة دنيا
زمرة
النسبة الجيرومغناطيسية

- H -
Hamiltonian
- Function
- operator
- of Dirac
Harmonic oscillator
Heisenberg

Hamiltonien
- (fonction)
- (opérateur)
- de Dirac
Harmonique (oscillateur)
Heisenberg

هاملتوني
تابع الهاملتوني
مؤثر الهاملتوني
هاملتوني ديراك
هزاز توافق
هايزنبرغ

- picture	- (image de)	صورة هايزنبرغ
- uncertainty principle	- (principe d'incertitude de)	مبدأ عدم التعيين لهايزنبرغ
Helium	Hélium	هيليوم
- isotopes	- isotopes	نظائر الهيليوم
Hermite polynomials	Hermite (polynôme de)	كثيرات حدود هرميت
Hermitian adjoint	Hermitique (adjoint)	المرافق الهرميتي
- operator	- (opérateur)	مؤثر هرميتي
Hydrogen atom	Hydrogène (atome d')	ذرة الهيدروجين
Hydrogen-like atom	Hydrogénoides (atomes)	ذرات شبه هيدروجينية
- I -		
Identical particles	Identiques (particules)	جسيمات متطابقة
Impulsion	Impulsion	نبض
Indistinguishable particles	Indiscernables (particules)	جسيمات لا تمايز
Interaction	Interaction	تفاعل
Invariant	Invariante	لامتغير
- k -		
Ket	Ket	كيت
Kinetic energy	Cinétique (énergie)	طاقة حركية
Kronecker delta	Kronecker (delta de)	دلتا كرونكر
- L -		
Lagrange's equation	Lagrange (équation de)	معادلة لاغرانج
Lagrangian	Lagrangien	تابع لاغرانج
Landau levels	Landau (niveaux de)	سويات لاندau
Laguerre polynomials	Laguerre (polynômes de)	كثيرات حدود لاغير
Laplacian operator	Laplacien (opérateur)	مؤثر لابلاس
Legendre polynomials	Legendre (polynômes de)	كثيرات حدود ليجاندر
Linear operator	Linéaire (opérateur)	مؤثر خطي
- M -		
Magnetic	Magnétique	مغناطيس

- dipole	(dipôle)	ثنائي أقطاب مغناطيسي
- fields	(champ)	دقل مغناطيسي
- moment	(moment)	عزم مغناطيسي
- quantum number	(nombre quantique)	عدد كمي مغناطيسي
- resonance	(résonance)	طنين مغناطيسي
- susceptibility	(susceptibilité)	طواعية مغناطيسية
Magneton (Bohr)	Magneton de Bohr	مغنيتون بور
Matrix representation	Matricielle (représentation)	تمثيل مصفوفي
Mean-square deviation	Ecart quadratique moyen	الانحراف التربيعي الوسطي
- N -		
Normalisation	Normalisation	تنظيم
Nucleus	Noyau	نواة
- O -		
Observable	Observable	ملحوظ
Operator	Opérateur	مؤثر
Hermitian -	- hermitique	مؤثر هرميتي
Linear -	- linéaire	مؤثر خطي
Unitary -	- unitaire	مؤثر واحد
Orthonormal set	Orthonormée (base)	مجموعة متوامة
- P -		
Parity	Parité	زوجية
Particle	Particule	جسيم
Pauli matrices	Pauli (matrices de)	مصفوفات باولي
Pauli exclusion principle	Pauli (principe d'exclusion de)	مبدأ باولي
Perturbation theory	Perturbation (théorie de)	نظرية الاضطراب
Planck's constant	Planck (constante de)	ثابت بلانك
Plane wave	Plane (onde)	موجة مستوية
Postulate	Postulat	مسلمة

Potential	Potentiel	كمون
- barrier	- (barrière de)	حاجز كمون
- well	- (puit de)	حفرة كمون
- step	- (marche de)	عتبة كمون
Probability	Probabilité	احتمال
- Q -		

Quanta	Quanta	كميات
Quantization	Quantification	تكميم
Quantum number principle	nombre quantique principe	العدد الكمي الرئيسي
- R -		

Radial	Radial	قطري
- function	- (fonction)	تابع قطري
Relative	Relative	نسبي
Relativistic quantum mechanics	Mécanique Quantique relativiste	ميكانيك الكم النسبوي
Representation	Représentation	تمثيل
Resonance	Résonance	طنين
Rydberg Constant	Rydberg (constante de)	ثابت ريدبرغ
- S -		

Scalar product	Scalaire (produit)	جداء سلمي
Schrödinger equation	Schrödinger (équation de)	معادلة شرودنجر
Selection rules	Sélection (règles de)	قواعد الانتقاء
Slater (determinant of)	Slater (détérminant de)	معين سلاتر
Spherical harmonics	Sphériques (harmoniques)	التوافقيات الكروية
Spectroscopy	Spectroscopie	علم الأطياف
Spectrum (spectra)	Spectre	طيف
Spin	Spin	سبين
- angular momentum	- (moment angulaire de)	العزم الحركي السبيني
State	Etat	حالة

Stirn-Gorlach experiment	Stirn-Gorlach (expérience de)	تجربة شترن غير لاخ
Stationary state	Stationnaire (état)	حالة مستقرة
Structure	Structure	بنية
Statistical distribution	Statistique (distribution)	توزيع احصائي
Superposition	Superposition	تراكيب
System	Système	جملة
-T-		
Tensor	Tenseur	تنسور
Translation	Translation	انسحاب
Tunnel	Tunnel	نفق
- effect	- (effet)	ظاهرة النفق
-U-		
Unitary	Unitaire	واحدى
- operator	- (opérateur)	مؤثر واحدى
-V-		
Valence	Valence	تكافوء
- electron	-(electron de)	الكثرون التكافوء
Variational methodes	Variationnelles (méthodes)	طرائق التغيير
Vector	Vecteur	شعاع
Viriel theory	Viriel (théorème de)	نظرية فيريال
-W-		
Wave	Onde	موجه
- equation	-(équation d')	معادلة الموجه
- function	-(fonction d')	تابع الموجه
-Z-		
Zeeman effect	Zeeman (effet)	مفعول زيمان



المراجع

- 1 - ميكانيك الكم I - د. قيصر فيازمنيكي - جامعة حلب 1983.
- 2 - ميكانيك الكم II - د. قيصر فيازمنيكي - جامعة حلب 1986.
- 3 - المدخل الى ميكانيك الكم - د. محمد أنور بطل - جامعة حلب 1987.
- 4 - أسس ميكانيك الكم - د. مالك علي - جامعة البعث 1989 - 1990.
- 5 - المدخل الى الميكانيك الكوانتي - د. عدنان المحاسب - جامعة دمشق 1966.

- 6 - Mécanique Quantique I et II, C.C. Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, Hermann, Paris 1973.
- 7 - Mécanique Quantique Thermodynamique, N. Hulin-Jung, J. Klein Hermann, Paris 1972.
- 8 - Le Cours de Physique de Feynman (Mécanique Quantique), R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, Inten Editions, Paris 1979.
- 9 - Mécanique Quantique (théorie non relativiste), L. Landau, E. Lifchitz, Editions Mir, Moscou 1974.
- 10 - Mécanique Quantique Relativiste (1^{ère} partie), L. Landau, E. Lifchitz, Editions Mir, Moscou 1972.
- 11 - Mécanique Quantique Relativiste (2^{ème} partie), L. Landau, E. Lifchitz, Editions Mir, Moscou 1973.

12. *Quantique Radiments*, J.-H. Lévy-Leblond, F. Balibar, Inter Editions, Paris 1984.
13. *Photons et Atomes (Introduction à l'électrodynamique Quantique)*, C.C. Tannoudji, J. Dupont, G. Grynberg, Inter Editions / Editions du CNRS, Paris 1987.

14. Ландау Л.Д.	Теоретическая механика	1969
15. Ландау Л.Д.	Курс теоретической механики	1971
16. Ландау Л.Д.	Курс теоретической механики	1977
17. Ландау Л.Д.	Специальный курс теоретической механики	1977
18. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М.	Механика	1980
19. Ландау Л.Д.	Курс теоретической механики	1984
20. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М.	Сборник задач по теоретической механике	1985
21. Ландау Л.Д.	Теоретическая механика и примеры и задачи	1986



المحتوى

(3)

مقدمه

الفصل الاول

الأسس الفيزيائية لميكانيك الكم

- (1) تمهيد - فشل الفيزياء الكلاسيكية وقصورها (7) - (2)
المفهوم المضاعف الجسيمي - الموجي (المثنوية) (10) - (3)
انعراج الإلكترونات (12) - (4) التابع الموجي (15) - (5)
التابع الموجي لمجموعة جسيمات (18) - (6) التابع الموجي
لجسيم حر (غير خاضع لأي كمون) (19) - (7) سرعة الطور
سرعة الباقة الموجيه (21) - (8) التحقيق التجريبي لفرضية دوبروي
مبدأ التراكب (24) - (9) مبدأ الشك (31) - مسائل الفصل
الأول (37) .

الفصل الثاني

معادلة شرودنغر الموجيه - تطبيقات

- (10) استنتاج معادلة شرودنغر (39) - (11) كثافة التيار
الاحتمالي (43) - (12) دراسة جسيم في حفرة كمون لانهاية
العمق (45) - (13) دراسة جسيم في حفرة لانهاية ذات ثلاثة
أبعاد (51) - (14) الهزاز التوافقي (54) - (15) حل
معادلة شرودنغر . حساب الطاقة (54) - (16) التوابع الموجيه
وتعيين مكان الجسم (58) - (17) الهزاز التوافقي ذو الأبعاد
الثلاثة (61) - (18) نفوذية وانعكاس الجسيمات على حاجز
الكمون (63) - مسائل الفصل الثاني (71) -

الفصل الثالث

الأسس الرياضية - الفرضيات الأساسية

- (6) تعاريف I (80) - (17) تعاريف II (82) -

- (18) الموءثرات الهرميتية (84) - (19) خواص الموءثرات
 الهرميتية (87) - (20) الموءثرات الواحدة ، التحريكات
 الواحدة (93) - (21) العلاقة بين طيفي موءثرين (95)
 - (22) الفرضيات الأساسية في ميكانيك الكم (97) - (23)
 حساب الموءثرين \hat{p}_i و \hat{x}_i بدلالة بعضهما (99) - (24) حساب
 التوابع الخاصة للموءثرين \hat{p} و \hat{x} (102) - (25) تمثيل
 هايزنبرغ ، تمثيل شرودنغر (103) - (26) دعوى فيريال
 (107) - (27) دراسة الهزاز التوافقي بطريقة الموءثرات ،
 حساب القيم الخاصة والتوابع الخاصة (108) مسائل الفصل الثالث
 • (115)

الفصل الرابع

العزم الحركي

- (28) تعريف العزم الحركي ، حساب المركبات في الاحداثيات
 الديكارتية والكروية (121) - (29) المبدلات الأساسية (124)
 - (30) طريقة ثانية لحساب مركبات العزم الحركي (128) -
 (31) حساب القيم الخاصة لموءثر العزم الحركي (131) - (32)
 التوابع الخاصة لموءثر العزم الحركي ، المتوافقات الكروية (135)
 - (33) القيم الخاصة لموءثر الانعكاس (138) - مسائل
 الفصل الرابع (141) •

الفصل الخامس

الحركة في حقل مركزي متناظر

- (34) معادلة شرودنغر (145) - (35) حساب ∇^2 في
 الاحداثيات الكروية (147) - (36) حل معادلة شرودنغر
 بطريقة فصل المتحولات (149) - (37) التوابع الموجية
 الزاوية الخاصة ، التوابع الكروية (151) - (38) المعنى
 الفيزيائي للعددين الكميين L و m (158) - (39) حركة
 جسيم على كرة (الدوار) (159) - (40) قواعد الانتقاء (163)
 - (41) طيوف الجزيئات ثنائية الذرة (165) -

— مسائل الفصل الخامس (171) .

الفصل السادس

الذرة الشبيهة بالهيدروجين

- (42) التوابع الخاصة والقيم الخاصة (175) — (43) مبدأ الانتقاء، طيف اشعاع الذرات الشبيهة بالهيدروجين (183) — (44)
تصحيح النتائج السابقة عندما تحسب حركة النواة — تطبيقات (186)
— مسائل الفصل السادس (191) .

الفصل السابع

الحركة في حقل مغناطيسي — سبين الإلكترون

- (45) مقدمه (193) — (46) تجربة شترن — غيرلاخ
(194) — (47) دراسة كلاسيكية (195) — (48) دراسة
كوانتية. (198) — (49) محاولة ترميم النظرية الكمومية
— مسلمات باولي (200) — (50) عودة الى تجربة شترن —
غيرلاخ (203) — (51) بعض خواص الجمل ذات السبين $\frac{1}{2}$ $s =$
(204) — (52) تركيب سبينين $\frac{1}{2}$ — (207)
(53) العزم الحركي الألكتروني الكلي (215) — مسائل الفصل
السابع (221) .

الفصل الثامن

الجسيمات المتطابقة — مبدأ باولي

- (54) الجسيمات المتطابقة ، تعريف (233) — (55) الجسيمات
المتطابقة في الميكانيك الكلاسيكي (233) — (56) الجسيمات
المتطابقة في الميكانيك الكوانتي (235) — (57) مؤثر التبديل
(238) — (58) خواص مؤثر التبديل (238) — (59) الأشعة
المتناظرة والأشعة اللامتناظرة (239) — (60) تحويلات
الملحوظات الفيزيائية بواسطة التبديل (240) — (61) جمل
تحتوي على N جسيم $N > 2$ (242) — (62) الأشعة المتناظرة

والأشعة اللامتناظرة لجملة N جسيم (245) - (63) مسلمة
التناظر (249) - (64) ازالة انطباق التبديل (250) -
(65) قاعدة تشكيل الأشعة الفيزيائية (250) - (66)
تطبيق على الجمل المكونة من جسيمين متطابقين (251) - (67)
تعميم على جمل مكونة من N جسيم ($N > 2$) (252) - (\bar{A})
الحالة الأولى (بوزونات) (253) - (ب) الحالة الثانية
(فيرميونات) (253) - (68) الفروق بين البوزونات
والفيرميونات (254) - (69) سوية الطاقة الدنيا لجملة مكونة
من جسيمات متطابقة مستقلة عن بعضها (255) - (70) الاحصاء
الكوانتي (257) - (71) الأزوت 14 والنوترون (258) - (72)
الكواركات (259) - (73) فرط السيولة - السائل الكوانتي -
(260) - (74) متراجحة هايزنبرغ - باولي (261) - (75)
الذرات (263) - (76) المادة الجهرية (265) - (77)
الكواكب والأقمار - الأقزام البيضاء (268) .

الفصل التاسع

الطرق التقريبية في ميكانيك الكم

(\bar{A}) طريقة التقريب شبه التقليدي (طريقة W.K.B.) (273)
- (78) معادلة هاملتون - جاكوبي في الميكانيك الكلاسيكي
(273) - (79) استنتاج معادلة هاملتون - جاكوبي من
معادلة شرودنغر (275) - (80) طريقة W.K.B. لحل المعادلة
(9.13) (276) - (81) تطبيق دراسة جسيم في حفرة كمون
(278) W.K.B. (ب) نظرية الاضطراب (280) - (82)
المعادلات العامة لنظرية الاضطراب غير المتعلقة بالزمن (281) -
(83) نظرية الاضطراب اللامستقره المتعلقة بالزمن (287) -
مسائل الفصل التاسع (291)

الفصل العاشر

مدخل الى ميكانيك الكم النسبي

(84) معادلة كلاين - غوردون (293) - (85) معادلة

- الاستمرار (295) - (86) معادلة ديراك (296) - (87)
مصفوفات ديراك (298) - (88) كثافتا الشحنة والتيار
(301) - (89) حلول معادلة ديراك لجسيم حر (302) -
(90) نظرية الثقوب (307) - ملحق (I) (311) -
ملحق (II) (319) - دليل المصطلحات العلمية (323) -
المراجع (331) - المحتوي (333)